

به نام آفریننده‌ی نور

دانش‌گاه صنعتی خواجه‌نصیرالدین طوسی
دانش‌کده‌ی برق
پایان‌نامه‌ی کارشناسی گرایش مخابرات

محاسبه فرکانس‌های رزونانس محفظه‌ی فلزی با استفاده از روش اجزاء محدود

امیرمسعود فرهمند

استاد راهنما: محمد صادق ابریشمیان

شماره پروژه: ۱۵۰۱

چکیده: روش اجزاء محدود به عنوان ابزاری قوی برای حل عددی مسایل الکترومغناطیس بسیار پرکاربرد است. در این پایان‌نامه با استفاده از آن، مساله محاسبه فرکانس رزونانس محفظه‌ی فلزی در حالت کلی حل شده است. در ابتدا مقدمات ریاضی آن روش گفته می‌شود، سپس روش اجزاء محدود برای حالت ۲-بعدی و ۳-بعدی توضیح داده می‌شود و در نهایت فرمول‌بندی‌ای از آن با استفاده از المان‌های لاگرانژی بیان خواهد شد. پس از آن به شرح چگونگی پیاده‌سازی فرمول‌بندی‌ها به صورت نرم‌افزاری پرداخته می‌شود و چند مساله‌ی نمونه با استفاده از آن حل خواهد شد.

لغات کلیدی: روش اجزاء محدود – محفظه فلزی – فرکانس‌های رزونانس – معادله موج برداری – شبیه‌سازی

Keywords: *Finite Elements Method – FEM - Metallic Cavity – Resonance Frequencies – Vector Wave Equation – Simulation*

فهرست مطالب

۳	فهرست مطالب
۵	فصل صفرم
۵	یک جور مقدمه
۸	فصل اول
۸	روش اجزاء محدود
۸	(۱-۱) مقدمه
۱۳	(۲-۱) حساب وردشی و کاربرد آن در الکترومغناطیس
~	(۱-۲-۱) محاسبه فراتابع با استفاده از اصل وردشی:
~	(۲-۲-۱) محاسبه فراتابع با استفاده از باقیمانده وزن دار:
۱۹	(۲-۱) تقریب توابع و فرم تقریبی فراتابع
~	(۱-۲-۱) روش تطبیق نقطه‌ای
~	(۲-۲-۱) روش هم‌مکانی زیردامنه‌ای
~	(۳-۲-۱) روش گالرکین
~	(۴-۲-۱) روش کم‌ترین مربعات
۳۰	(۵-۲-۱) تقریب محیط با عناصر محدود
۳۲	(۳-۱) روش اجزا محدود
۳۵	فصل دوم
۳۵	حل مسایل الکترومغناطیس به کمک روش اجزاء محدود
۳۵	(۱-۲) مقدمه
۳۸	(۲-۲) روش اجزا محدود ۱-بعدی
~	(۱-۱-۲-۲) محاسبه فراتابع با استفاده از روش رایلی-ریتز (اصل وردشی)
~	(۲-۱-۲-۲) محاسبه فراتابع با استفاده از روش باقیمانده وزن دار
~	(۲-۲-۲) خردکردن فراتابع
~	(۳-۲-۲) جمع‌آوری معادلات المان‌ها
~	(۴-۲-۲) اعمال شرایط مرزی
۷۰	(۳-۲) روش اجزا محدود ۲-بعدی
~	(۱-۱-۳-۲) محاسبه فراتابع با استفاده از روش رایلی-ریتز (اصل وردشی)
~	(۲-۱-۳-۲) محاسبه فراتابع با استفاده از روش باقیمانده وزن دار
~	(۲-۳-۲) خردکردن فراتابع
۸۷	فصل سوم
۸۷	فرکانس‌های رزونانس محفظه‌ی فلزی

۸۷	 ۱-۳ مقدمه
۸۸	 ۲-۳ معادله موج برداری و محفظه رزونانسی
۹۰	 ۳-۳ محاسبه فراتابع با استفاده از روش رایلی-ریتز (اصل وردشی)
۹۱	 ۴-۳ محاسبه فراتابع با استفاده از روش باقیمانده وزن دار
۹۳	 ۵-۳ المان های ۳-بعدی و بسط تمام-موج میدان
۹۹	 ۶-۳ مدهای ناخواسته
۱۰۱	 ۷-۳ خرد کردن
۱۰۱	 ۸-۳ اعمال شرایط مرزی
۱۱۱	 فصل چهارم
۱۱۱	 پیاده سازی روش اجزاء محدود و نتایج آزمایش ها
۱۱۱	 ۱-۴ مقدمه
۱۱۳	 ۲-۴ فرکانس های رزونانس مکعب مستطیل فلزی
۱۱۹	 ۳-۴ فرکانس های رزونانس استوانه فلزی
۱۲۴	 ۴-۴ فرکانس های رزونانس کره فلزی
۱۲۸	 ۵-۴ نتیجه گیری و پیشنهادها
۱۳۱	 فصل پنجم
۱۳۱	 مراجع

من

پری کوچک غمگینی را

می‌شناسم که در اقیانوسی مسکن دارد

و دل‌اش را در یک نی‌لیک چوبین

می‌نوازد آرام آرام

پری کوچک غمگینی

که شب از یک بوسه می‌میرد

و سحرگاه از یک بوسه به دنیا خواهد آمد.

-فروغ فرخزاد

فصل صفرم

یک جور مقدمه

اول‌اش فکر می‌کردم نوشتن این بخش از همه راحت‌تر است ولی انگار اشتباه می‌کردم. حال که نوشتن پایان‌نامه تمام شده است و فهرست مراجع را هم آماده کرده‌ام و فقط یک مقدمه-مانندی مانده است تا برود برای چاپ (یک چیزی شبیه به روزنامه‌ها!) مانده‌ام که چه بنویسم. نمی‌دانم اگر بنویسم چطور شد که چنین موضوعی را برای پروژه‌ی لیسانس‌ام انتخاب کرده‌ام بهتر است یا این که بگویم حالا که این پایان‌نامه تمام شده است و اگر همه چیز مطابق روال پیش رود تا یکی دو هفته‌ی دیگر از این دانشگاه خداحافظی خواهیم کرد، چه حسی دارم. شاید هم بد نباشد از چند نفری تشکر کنم و بگذارم بروم پی کارم.

خوب ... نمی‌نویسم چرا بیش از یک سال است که روی روش‌های عددی در الکترومغناطیس کار می‌کنم چون واقعا مهم نیست. اگر مهم بود که می‌شد رفت و از شش میلیارد آدم دیگر پرسید که چرا به جای فلان کار، آن یکی را انجام داده‌اند و از این حرف‌ها! این که بخواهم بگویم چه حسی دارم نیز چندان فایده‌ای ندارد. مگر می‌شود در یک وجب‌جا و در این چند دقیقه وقت باقی‌مانده (به هر حال باید همین امروز چاپ شود!) بگویی "خوش‌حالی ولی نه زیاد، ناراحتی ولی نه کم" و بعد اضافه کنی "گرچه واقعا دوست دارم بروم یک‌جای دیگر" و کلی چیز دیگر. نوشتن درباره‌ی این‌ها را گذاشته‌ام برای یک جای مناسب.

یکمی درباره‌ی پایان‌نامه ... این پایان‌نامه نمی‌بایست درست مثل بقیه‌ی پایان‌نامه‌ها می‌شد. متن‌هایی که چندین و چند بار از روی هم نوشته شده‌اند و معلوم نیست اولین نفر چه کسی درباره‌ی "مادولاسیون چیست؟" نوشته است و سال‌ها از روی آن نسخه‌برداری شده است. پس این پایان‌نامه کپی‌برداری نیست! (یکی دو جا -مخصوصا در اوایل- یکی دو فهرست از مقدمه‌ی یکی دو تا از کتاب‌ها (کتاب Sadiku و Salazar-Palma) اقتباس کرده‌ام ولی نه خیلی بیش‌تر) البته به قول دکتر ابریشمیان (روی جلد را بخوانید،

متوجه می‌شوید ربط ماجرا را) در نوشتن چنین چیزهایی نمی‌توان ادعا کرد که چیز جدیدی نوشته شده است – همه‌اش قبلاً ثابت شده. قبول دارم ... با این‌که تقریباً اکثر روابط را خودم هم اثبات کرده‌ام (و شما اثبات‌های مرا در نوشته خواهید خواند) ولی اول و آخر همه‌شان از قبل معلوم بوده‌اند. کلاً می‌شود گفت که این پروژه خلاقیت چندانی ندارد. البته جز در بخش برنامه‌نویسی‌اش که شما به طور معمول چیزی از آن نمی‌بینید. اگر تعقل را به دو بخش خلاقیت و هوش‌مندی تقسیم کنیم، در این پایان‌نامه مسلماً دومی‌اش می‌چربد. با این‌حال چندان ناامید نیستم چون وضعیت این پروژه نسبت به اکثر پروژه‌های لیسانس دیگر بسیار امیدوارانه است: حداقل من که این‌طور فکر می‌کنم! تفاوت دیگر این پروژه با اکثر نوشته‌های فنی فارسی دیگر، این است که فعل مجهول در آن کم استفاده شده است. این پروژه را "من" انجام داده‌ام و به نظرم طبیعی‌تر می‌آید که از همان ضمیر اول شخص در آن استفاده کنم. با وجود این‌که این به ظاهر بسیار عجیب و حتی غیرعلمی می‌آید ولی اعتقاد دارم که چنین گونه نوشتنی بسیار مناسب‌تر و دقیق‌تر است. البته این ایده از من نیست: قبل از شروع به نوشتن کمی در اینترنت گشت زدم و راهنمایی به مضمون "چگونه تز دکترای خود را بنویسید" پیدا کردم و در آن‌جا چنین توصیه‌ای شده بود. به هر حال با این‌که احتمال می‌دادم به این اعتراض شود، ولی نظرم را عوض نکردم. درباره‌ی رسم‌الخط این پروژه باید بگویم که تا حد امکان به قواعد بی‌فاصله نویسی پای‌بند بوده‌ام. بی‌فاصله نویسی به طور خلاصه یعنی این‌که هر کدام از اجزای نوشتاری زبان را برخلاف سبک قدیمی که همه اجزا را به هم می‌چسباند تا حد ممکن به همان صورت اصلی و جدا از هم بنویسیم. یعنی به جای "می‌گویم"، "همانکه" و "کتابش" بنویسیم "می‌گویم"، "همان‌که" و "کتاب‌اش". گرچه در بعضی از ترکیب‌ها ترجیح داده‌ام از همان رسم‌الخط قدیمی استفاده کنم. درباره‌ی این پروژه تنها یک چیز دیگر باقی می‌ماند. آن هم این است که بگویم چگونه می‌توانید با من تماس بگیرید. بهترین روش برای این‌کار، ارسال ای‌میل به یکی از دو آدرس SoloGen@SoloGen.net و SoloGen@yahoo.com است. علاوه بر این، به زودی خواهید توانست متن پایان‌نامه و هم‌چنینی بقیه‌ی مقالات‌ام را (که احیاناً چاپ نشده‌اند) در سایت www.SoloGen.net بیابید.

توضیح بیش‌تری درباره‌ی پایان‌نامه نمی‌دهم. تنها به نظرم می‌آید که لازم است برای یک‌بار هم که شده از بعضی کلاس‌ها و استادها که برای‌ام جالب بوده‌اند یاد می‌کنم. به ترتیب زمانی می‌نویسم: شروع "یاد بعضی نفرات" از ترم دوم است و مهندس هنری. پس از آن ترم سوم مصادف بود با اولین برخورد با بسیاری از استادهایی که کلاس‌هایی جذاب و به یادماندنی با آن‌ها داشتم: دکتر ابریشمیان، دکتر گرانیپیه و دکتر نکویی. ترم چهارم در کلاس‌های دکتر کامیاب و دکتر زکایی بسیار لذت بردم. ترم پنجم با مهندس ابوتراب و درس فوق‌العاده زیبای آنتن آشنا شدم و هم‌چنین دکتر کلانتری و مهندس لطیفی. در ترم ششم با هیچ شخص جدید تأثیرگذاری آشنا نشدم (البته باز بستگی دارد که تأثیر چه باشد!) و نتیجه این شد که معدل ۳ نمره افت کرد! ترم هفتم نیز جز درس دکتر اردبیلی واقعا خبر خاصی نبود: اکثر درس‌های اصلی و مهم‌ام را گذرانده بودم و آزمایش‌گاه‌ها مانده بودند و درس‌هایی که بود و نبودشان تفاوت چندانی نمی‌کرد. در نهایت ترم هشتم شد و من تقریباً با همه‌ی کسانی که می‌بایست آشنا می‌شدم، آشنا شده بودم. یک کلاس زیبا در این ترم داشتم و آن هم درس مهندس نوریان بود. همین! اما این پایان ماجرا نیست: مهندس خسروجردی، کسی بود که با این‌که با او کلاسی نداشته‌ام ولی حاضر بود ساعت‌ها برای‌ام از کنترل مقاوم و مدرن و ... بگوید در حالی که من حتی کنترل خطی را هم پاس نکرده بودم. به نظرم می‌آید تأثیر او در ناخودآگاه‌ام کم نبوده باشد. در نهایت می‌بایست دوباره از دکتر ابریشمیان به طور ویژه تشکر کنم، به خاطر همه کمکی که در این سه سالی که او را می‌شناسم به من کرده است. ممنون!

چند نفری هم هستند که می‌بایست به یادشان باشم و هستم. خیلی‌هایی که ارتباطشان با من خیلی بیش‌تر از پایان‌نامه و درس و این چیزهاست. اما در این جا یاد می‌کنم چون فراتر از این نوشتار هستند. کسی را فراموش نمی‌کنم!

امیرمسعود فرهمند

شهریور ماه سال ۱۳۸۱ خورشیدی

"God does not care about our mathematical difficulties. He integrates empirically."

— A. Einstein

فصل اول

روش اجزاء محدود

1-1) مقدمه

با گسترش روزافزون تکنولوژی و نیاز به طراحی‌های مهندسی پیچیده‌تر و دقیق‌تر، نیاز به استفاده از روش‌های جدید برای تحلیل مسایل به وضوح مشاهده می‌شود. امروزه مسایل مهندسی آن‌چنان پیچیده شده‌اند که روش‌های سنتی و دستی حل، دیگر پاسخ‌گوی نیاز تکنولوژی نیست. اگر در گذشته برای بسیاری از مسایل علوم و مهندسی قادر به یافتن فرمی بسته¹ بودیم، ولی با پیچیده شدن شکل ظاهری مسایلی که در عمل به کار می‌رود دیگر قادر به انجام این کار نیستیم و مجبوریم از روش‌های دیگری که اغلب تقریبی هستند بهره ببریم. برای روشن شدن مساله بهتر است به سیستم‌های الکترومغناطیسی - که موضوع اصلی این پایان‌نامه است - بپردازیم.

سیستم‌های الکترومغناطیسی که در مخابرات رادیویی، مایکروویو و نوری به کار می‌روند، سیستم‌های راداری و ... و نیاز به محاسبه اسکترینگ و RCS² اجسام پیچیده‌تر از کره و استوانه (که با استفاده از روش‌های آنالیتیک قابل حل‌اند) و همچنین محاسبه انتشار امواج در سیستم‌های پیچیده چون بدن انسان - که در تشخیص و یا درمان بیماری‌ها با استفاده از پرتوی الکترومغناطیسی به کار می‌رود- نیاز به استفاده از ابزارهایی جدید و توانا را الزامی می‌کند ([1]، [2]، [3]). تا چندی پیش روش حل غالب برای چنین مسایلی، استفاده از روش‌های آنالیتیک³ بود. این روش‌ها قادرند پاسخ مساله را به فرم دقیق ریاضی بیان کنند. روش‌های معمول آنالیتیک این‌ها هستند [2]:

¹ Closed form

² Radar Cross Section

³ یا این‌که می‌توان از واژه روش‌های تحلیلی به جای Analytical methods استفاده کرد، اما در این‌جا ترجیح داده‌ام که از همین معادل آنالیتیک استفاده کنم تا با واژه تحلیل که معنایی عام دارد خلط نشود.

- جداسازی متغیرها^۴
- بسط (گسترش) سری‌ها^۵
- تبدیلات هم‌مدیس^۶
- معادلات انتگرالی^۷
- روش‌های اختلال^۸

بزرگ‌ترین مشکل این روش‌ها این است که در عمل قابل استفاده نیستند! یا اگر منصفانه‌تر بگوییم، تنها به صورت‌های بسیار ساده‌ای می‌پردازند که در بسیاری از مسایل عملی بی‌کاربرد می‌شوند. به طوری که Paris و Hurd در سال ۱۹۶۹ گفته بودند: "اکثر مسایلی که به روش آنالیتیک قابل حل بوده‌اند تا به حال حل شده‌اند[2]."

از طرف دیگر، امروزه روش‌های عددی که بر پایه حل مسایل (در این‌جا مسایل الکترومغناطیسی) با محاسبات تقریبی هستند بسیار گسترش پیدا کرده‌اند. البته این روش‌ها چندان جدید نیستند، اما استفاده روزافزون آن‌ها پس از به وجود آمدن و در دسترس شدن کامپیوترها همگانی شده است. کامپیوترها ما را قادر می‌سازند تا از روش‌های عددی که نیاز به محاسبات بسیار طولانی و وقت‌گیر دارند به راحتی استفاده کنیم. شاید بتوان گفت ویژگی اصلی این روش‌ها این است که به جای اندیشیدن به راه حلی بدیع و گاهی غیرممکن برای حل مساله‌ای خاص، با استفاده از فرمول‌بندی نسبتاً کلی‌ای به حل بسیاری از مسایل دست‌یابیم. در این صورت تنها تفاوت مسایل در شکل و ترکیب‌بندی آن است و نه فرآیند زیرین حل آن‌ها. در نتیجه تحقیقات بسیاری برای به کارگیری روش‌های عددی مختلف در قالب نرم‌افزارهای CAD^۹ انجام می‌شود. شاید بتوان گفت هدف نهایی، رسیدن به ابزارهایی است که کار طراحی، تحلیل و بهینه‌سازی یک

^۴ Separation of variables

^۵ Series expansions

^۶ Conformal mapping

^۷ Integral solutions

^۸ Perturbation methods

^۹ Computer Aided Design

مساله الکترومغناطیسی را (مثلا ساخت آنتن با پرتوی^{۱۰} دل خواه، سیستمی با تلفات مینیمم و ...) بسیار آسان کند [1]. روش های مختلف عددی که به زودی خلاصه ای از آنها را بیان خواهیم کرد، انتخاب بسیار مناسبی برای تحلیل مسایل الکترومغناطیس به طور کلی است.

پیش از ادامه لازم است به این نکته اشاره کنم که به صرف داشتن روشی مناسب برای تحلیل مساله ای خاص، آن مساله در عمل حل نشده است. روش های حل تنها پاسخ یک ترکیب خاص از مساله را به دست می آورند. اما مساله در عمل، به دست آوردن پاسخی است که با توجه به معیارهای ما بهینه باشد. به این معنا که به ازای تغییر پارامترهای مختلف مساله (مثلا ضخامت لایه بافر در موج بر دی الکتریک تحریک شده با الکتروود فلزی [4]، عمق زایده فلزی^{۱۱} در موج بر، ضخامت لایه های دی الکتریک در پوشش ضدانعکاس [5] و ...) با توجه به معیارهای ما (میزان تضعیف، میزان انعکاس، اغتشاش در شکل موج و ...) نیز بهینه باشد. پس لازم است علاوه بر توجه به حل مساله، به روش های مختلف پیدا کردن پاسخ های بهینه نیز توجه شود. روش های گوناگونی برای این کار وجود دارد که می توان به روش های جستجوی تصادفی، استفاده از گرادیان فضای پارامتری، روش های تکاملی و ... نام برد. البته در این پایان نامه در این مورد بحثی نخواهم کرد. روش های عددی متعددی در الکترومغناطیس به کار می روند. از این میان می توان از روش های زیر نام برد [1]:

- روش تفاضلات جزئی^{۱۲} (زمانی^{۱۳} و فرکانسی^{۱۴})
- روش اجزاء محدود^{۱۵} (زمانی و فرکانسی^{۱۶})
- روش ممان^{۱۷}
- روش خطوط^{۱۸}

¹⁰ Pattern

¹¹ Septum

¹² Finite Difference Method (FDM)

¹³ FD – Time Domain (FDTD)

¹⁴ Frequency Domain

¹⁵ Finite Elements Method (FEM)

¹⁷ Methods of Moments (MoM)

¹⁶ برخلاف FETD، FDTD چندان متداول نیست.

• روش خطوط انتقال ماتریسی^{۱۹}

• روش اجزاء مرزی^{۲۰}

و البته این تنها چند نمونه از موارد بی‌شماری است که به کار می‌رود. اکثر این‌ها با هم ترکیب شده‌اند و روش‌های هیبریدی مانند FE/BI (Finite Element/Boundary Integral) به وجود آمده است.

روش تفاضلات محدود، یکی از ساده‌ترین روش‌های عددی برای حل مسایل الکترومغناطیس است. این روش مبتنی بر تبدیل معادله دیفرانسیل به معادله تفاضل جزئی می‌باشد. در این روش کل ناحیه مساله تبدیل به شبکه‌ای تقسیم شده به گره‌هایی^{۲۱} می‌شود که در هر کدام مقدار پاسخ معادله دیفرانسیل قرار داده می‌شود. برای هر کدام از این گره‌ها، تقریب تفاضلی معادله اصلی نوشته می‌شود و سپس به کمک روش‌های جبری دستگاه معادله حاصل حل می‌شود. به همین دلیل است که پیاده‌سازی این روش به نسبت روش‌های دیگر ساده‌تر است. جدا از این می‌توان گفت در این روش شباهت معادلات حاصل نسبت به فرم آشنای PDE معادلات ماکسول (یا هر معادله دیگری) بیش از هر روش دیگری است^{۲۲}. بزرگ‌ترین عیب FD (چه در فرم زمانی و چه در فرم مکانی) بزرگ شدن بیش از حد ماتریس و هم‌چنین پشتیبانی نکردن ذاتی از مسایل باز^{۲۳} است. برای مطالعه بیش‌تر در این زمینه می‌توانید به [6] و [7] مراجعه کنید.

روش اجزاء محدود^{۲۴} - که در این پایان‌نامه از آن استفاده شده است - یکی از روش‌های عددی است که بر اساس اصل وردشی^{۲۵} بیان می‌شود. این اصل که در قسمت‌های بعدی بیش‌تر درباره‌اش توضیح خواهیم داد، معادل تبدیل یک PDE با شرایط مرزی به مساله یافتن اکسترمم یک انتگرال وردشی است. در نتیجه به جای حل مستقیم معادله دیفرانسیل و برخلاف روشی مانند FD، مساله در ظاهر متفاوت دیگری را حل

¹⁸ Method of Lines (MoL)

¹⁹ Transmission Line Matrix Method (TLM)

²⁰ Boundary Element Methods (BEM)

²¹ Node

²² همان‌طور که خواهید دید، در روش‌های دیگر مانند FE، فرم دیفرانسیلی معادله به طور کلی از بین می‌رود و نتیجه شباهتی با فرم آشنای معادلات ماکسول و شرایط اولیه آن ندارد.

²³ Open region

²⁴ با وجود ترجمه‌ای نسبتاً پذیرفته شده برای Finite Elements، در این پایان‌نامه تا حد ممکن از به کار بردن معادل فارسی‌اش خودداری می‌کنم و از مختصر شده آن یعنی FE یا FEM که به ترتیب معادل Finite Elements Method و Finite Elements می‌باشند استفاده خواهم کرد.

²⁵ Variational Principle

می‌کنیم. البته این اصل بسیار کلی است و FE یکی از صورت‌های آن است. در FE، ما فضای مساله را به تعدادی عنصر کوچک تقسیم می‌کنیم و برای هر کدام از این عناصر به طور مستقل مساله وردشی را حل می‌کنیم. روش FE این مزیت را دارد که بدون تغییر زیرساخت محاسباتی‌اش، می‌تواند با محیط‌های بسیار متنوعی کار کند. علاوه بر آن به راحتی می‌توان در محیط‌های با مواد ناهمگن^{۲۶} کار کند و این ویژگی‌ایست که روش‌های دیگر چون MoM قادر به آن نیستند.

بدون وارد شدن به جزئیات، لازم است بگوییم که روش MoM نیز تا حدی شبیه به FEM است. این شباهت مخصوصاً در حالتی است که از روش باقیمانده وزن‌دار در FEM استفاده شود. با این وجود تفاوت‌هایی بین این دو وجود دارد. مثلاً این‌که این روش به جای حرکت از معادلات دیفرانسیل ماکسول، از پاسخ انتگرالی معادلات ماکسول شروع به حرکت می‌کند و توانایی آن منوط به در اختیار داشتن پاسخی انتگرالی از مساله است که این یکی به معنای داشتن تابع گرین^{۲۷} مساله است که همیشه -مخصوصاً برای محیط‌های ناهمگن- چندان راحت به دست نمی‌آید. برای مطالعه بیش‌تر درباره روش ممان می‌توانید به [8]، [9] و [10] مراجعه کنید.

هدف این پایان‌نامه، رسیدن به فرمول‌بندی مناسب برای حل مساله به دست آوردن فرکانس‌های رزونانس محفظه^{۲۸} فلزی با استفاده از روش FEM است. برای این کار ابتدا در فصل اول درباره روش‌های عددی توضیح خواهیم داد و تاکید بیش‌تری را بر حساب وردشی^{۲۹} و روش مبتنی بر باقیمانده وزن‌دار^{۳۰} خواهیم داشت. این دو، روش‌هایی هستند که برای فرمول‌بندی FEM به کارمان خواهد آمد. در فصل دوم این روش‌ها را به طور مرحله به مرحله برای فرمول‌بندی FE در حالت ۱-بعدی و ۲-بعدی به کار خواهیم بست تا چگونگی استفاده‌شان مشخص شود. فصل سوم را می‌توان نقطه شروع اصلی مساله محفظه فلزی دانست چون در آن، فرمول‌بندی FE لازم برای حل این نوع مسائل به دست می‌آید. در فصل چهارم به توضیح پیاده‌سازی این روش به صورت نرم‌افزاری خواهیم پرداخت و نتایج حاصل را بیان خواهیم کرد.

²⁶ Inhomogenous

²⁷ Green function

²⁸ Cavity Resonator

²⁹ Calculus of Variations

³⁰ Weighted Residuals

۲-۱) حساب وردشی و کاربرد آن در الکترومغناطیس

همان‌طور که در قسمت قبل گفتیم، روش FEM براساس استفاده از اصل وردشی مسایل را حل می‌کنند. در حساب وردشی، ما برای حل یک مساله PDE می‌توانیم آن را به مساله معادل در حساب وردشی - که صورتی انتگرالی دارد - تبدیل کنیم. در آن صورت پاسخ مساله معادل یافتن مکانی از فضای پاسخ‌هاست که آن انتگرال را به حالت ایستا^{۳۱} درآورد. به این انتگرال، فراتابع^{۳۲} می‌گویند^{۳۳}.

در نتیجه برای استفاده از چنین روشی، می‌بایست به نحوی فراتابع مساله را (که در این جا یک PDE با شرایط مرزی است) به دست آوریم. دو روش مختلف برای چنین کاری وجود دارد. یکی استفاده از روش مستقیم حساب وردشی است و دیگری استفاده از روش غیرمستقیم باقیمانده‌های وزن‌دار. این دسته اخیر شامل چندین روش مختلف می‌شود که از این میان روش گالرکین^{۳۴} و کم‌ترین مربعات خطا^{۳۵} متداول‌ترند. در ابتدا فرمول‌بندی روش مستقیم را بیان می‌کنم.

۱-۲-۱) محاسبه فراتابع با استفاده از اصل وردشی:

فرض کنید مساله شرایط مرزی‌ای با معادله دیفرانسیل زیر را داریم:

$$L\phi = f \quad (1-1)$$

³¹ Stationary

³² Functional

³³ مفهوم Functional، تابعی از تابع است. یعنی یک functional، تابعی است که به حرکت در دامنه آن باعث به وجود آمدن توابع مختلفی می‌شود. در نتیجه معادل مستقیم آن تابع تابع است ولی به دلیل نازیبایی این ترکیب از فراتابع به جای‌اش استفاده خواهیم کرد. فراتابع معادل Meta-Function است که پیش‌وند meta به معنای ماورا، در مرحله بالاتر بودن و ... را می‌دهد که به نظر انتخاب مناسبی می‌آید و مفهوم مورد نظر را می‌رساند.

³⁴ Galerkin

³⁵ Least Square of Error

که در آن L اپراتور دیفرانسیلی و ϕ پاسخ مساله و f هم منبع^{۳۶} (یا تحریک^{۳۷}) باشد. در آن صورت اگر اپراتور خودالحاق^{۳۸} و مثبت-تعریف^{۳۹} باشد، فراتابع به صورت زیر تعریف می‌شود [11]:

$$F(\phi) = \frac{1}{2} \langle L\phi, \phi \rangle - \frac{1}{2} \langle \phi, f \rangle - \frac{1}{2} \langle f, \phi \rangle \quad (1-2)$$

که در آن $\langle \phi, \phi \rangle$ ضرب داخلی در فضای هیلبرت^{۴۰} است که به صورت زیر تعریف شده است:

$$\langle \phi, \phi \rangle = \int_{\Omega} \phi \phi^* d\Omega \quad (1-3)$$

شرط خودالحاقی، این است:

$$\langle L\phi, \phi \rangle = \langle \phi, L\phi \rangle \quad (1-4)$$

و شرط مثبت-تعریف بودن اپراتور نیز به صورت زیر می‌باشد:

$$\langle L\phi, \phi \rangle = \begin{cases} > 0 & \phi \neq 0 \\ 0 & \phi = 0 \end{cases} \quad (1-5)$$

در نتیجه در صورت برقرار بودن این دو شرط، می‌توان فراتابع مساله را با استفاده از اصل وردشی به دست آورد. حال اگر این فراتابع را ایستا کنیم، معادله دیفرانسیل متناظرش برقرار می‌شود. علاوه بر آن همان‌طور

³⁶ Source

³⁷ Excitation

³⁸ Self-adjoint

³⁹ Positive-definite

⁴⁰ Hilbert Space

که خواهید دید با انجام این کار نقطه ایستایی، همان نقطه مینیمم F خواهد بود. با این که هیچ الزامی به مینیمم بودن F برای حل مساله به طور کلی وجود ندارد، اما در بعضی از مسایل فیزیکی، این معنادارست. به عنوان مثال این می تواند به معنای مینیمم بودن انرژی سیستم باشد که در بسیاری از مسایل فیزیکی از شرایط پایداری مساله است. پیش از این که بیش تر به این مساله بپردازم، بهتر است اثبات کنم که چگونه می توان از ایستایی فراتابع به برقراری معادله دیفرانسیل رسید. شرط ایستایی را می نویسیم (δ نماد وردشی⁴¹ نام دارد):

$$\delta F(\phi) = 0 \quad (1-6)$$

بدون وارد شدن به جزئیات، تنها به ذکر این نکته اکتفا می کنم که این به مفهوم تغییری بسیار کوچک در تابع ϕ (پاسخ معادله دیفرانسیل در حوزه ثابت Ω) است. خواص این اپراتور، بسیار شبیه به اپراتور دیفرانسیل است. برای مطالعه بیش تر در این زمینه می توانید به [2]، [12] و [13] مراجعه کنید. با جای گذاری، خواهیم داشت:

$$\delta F(\phi) = \frac{1}{2} \langle L\delta\phi, \phi \rangle + \frac{1}{2} \langle L\phi, \delta\phi \rangle - \frac{1}{2} \langle \delta\phi, f \rangle - \frac{1}{2} \langle f, \delta\phi \rangle = 0 \quad (1-7)$$

از آن جا که فرض شده است اپراتور خودالحاق باشد، می توان جمله اول را به صورت زیر تغییر داد:

$$\delta F(\phi) = \frac{1}{2} \langle \delta\phi, L\phi \rangle + \frac{1}{2} \langle L\phi, \delta\phi \rangle - \frac{1}{2} \langle \delta\phi, f \rangle - \frac{1}{2} \langle f, \delta\phi \rangle = 0 \quad (1-8)$$

و با ترکیب جمله اول و سوم و هم چنین جمله دوم و چهارم خواهیم داشت:

⁴¹ Variational Symbol

$$\delta F(\phi) = \frac{1}{2} \langle \delta\phi, L\phi - f \rangle + \frac{1}{2} \langle L\phi - f, \delta\phi \rangle = 0 \quad (1-9)$$

و با توجه به تعریف ضرب داخلی در فضای هیلبرت داریم:

$$\delta F(\phi) = \frac{1}{2} \langle \delta\phi, L\phi - f \rangle + \frac{1}{2} \langle \delta\phi, L\phi - f \rangle^* = \text{Re}[\langle \delta\phi, L\phi - f \rangle] = 0 \quad (1-10)$$

و از آن جا که $\delta\phi$ تغییری دلخواه است، نتیجه می شود که:

$$L\phi - f = 0 \quad (1-11)$$

و این خواسته ی ما بود.

برای اثبات این که نقطه ایستای به دست آمده، مینیمم فراتابع است، می نویسیم:

$$\delta(\delta F) = \delta F(\phi + \delta\phi) - \delta F(\phi) \quad (1-12)$$

با قرار دادن رابطه (1-10) در جمله بالا خواهیم داشت:

$$\delta(\delta F) = \text{Re}[\langle \delta\phi, L(\phi + \delta\phi) - f \rangle] - \text{Re}[\langle \delta\phi, L\phi - f \rangle] = \text{Re}[\langle \delta\phi, L(\delta\phi) \rangle] \quad (1-13)$$

و با توجه به خاصیت مثبت-تعریف بودن اپراتور (که فرض شده است)، می توانیم بگوییم که این عبارت

$(\delta(\delta F))$ بزرگ تر از صفر است و این معادل مینیمم بودن نقطه ایستایی است.

در این بخش روشی را بیان کردم که ما را قادر ساخت فراتابع مورد نیاز را به دست آوریم. اما نکته قابل توجه این است که شرط اساسی برای چنین کاری، خودالحاقی اپراتور L بود. در نتیجه کاربردی بودن این روش به این بازمی‌گردد که در مسایل واقعی در الکترومغناطیس چنین چیزی تا چه حد برقرار است. شرط خودالحاقی یک مساله الکترومغناطیس بدین صورت است:

۱. حقیقی^{۴۲} بودن اپراتور L

۲. همگن^{۴۳} بودن شرایط مرزی

برای حقیقی بودن اپراتور، لازم است پارامترهایی چون ϵ_r و μ_r حقیقی باشند. در نتیجه برای محیط‌های باتلف، چنین چیزی صحت ندارد. هموژن بودن شرایط مرزی هم در صورتی که مقدار شرط مرزی دیرچله^{۴۴} غیر صفر باشد (شرط مرزی دیرچله ناهمگن) و یا مشتق عمود بر سطح آن غیر صفر باشد یا ترکیبی خطی از این‌ها غیر صفر شود (شرط مرزی کوشی^{۴۵}) نقض می‌شود. البته برای حل این مشکل می‌توان با تغییراتی در تعریف اپراتور ضرب داخلی (و تعریف آن به صورت ضرب متقارن^{۴۶} به جای فرم فضای هیلبرتی) و فرم اصل وردشی مساله را حل کرد. در این جا بیش تر بر روی این مساله تاکید نمی‌کنم. برای توضیحات بیش تر در این باره می‌توانید به [11] مراجعه کنید.

۱-۲-۲) محاسبه فراتابع با استفاده از باقیمانده وزن دار:

همان‌طور که قبلاً گفتم، یکی از دیگر روش‌های به دست آوردن فراتابع استفاده از روش باقیمانده وزن دار است. بنای این روش -که در آن از اصل وردشی استفاده نمی‌شود- صفر کردن خطای پاسخ است. اگر داشته باشیم:

⁴² Real

⁴³ Homogenous

⁴⁴ Dirichlet

⁴⁵ Cauchy Boundary Condition

⁴⁶ Symmetric product

$$R(\phi) = L\phi - f \quad (1-14)$$

و بتوانیم $R(\phi)$ را صفر کنیم، به این معناست که به پاسخ مساله رسیده‌ایم. به این فرم، فرم قوی⁴⁷ یا کلاسیک⁴⁸ مساله شرایط مرزی می‌گویند. در نتیجه، پاسخ می‌بایست دقیقاً شرایط پیوستگی با تمام درجات مشتق‌پذیری مساله اصلی را دارا باشد. یعنی اگر اپراتور L دارای مشتق درجه ۲ باشد، ϕ نیز می‌بایست همان شرایط را ارضا کند. اما فرم دیگر که به فرم ضعیف⁴⁹ مساله معروف است، بدین صورت فرمول‌بندی می‌شود:

$$W(\phi, \psi) = \langle R(\phi), \psi \rangle = \int_{\Omega} \psi^* \cdot R(\phi) d\Omega = 0 \quad (1-15)$$

که در آن ϕ مانند قبل پاسخ مساله و ψ تابعی وزنی است. تفاوت این صورت‌بندی با قبل در این است که بدین نحو باقیمانده به صورت نقطه به نقطه صفر نمی‌شود بلکه به شکل توزیع شده⁵⁰ (انتگرالی) ارضا می‌شود. در نتیجه پاسخ به دست آمده می‌تواند تقریبی باشد و این برای کار عددی ما مهم است. علاوه بر این همان‌طور که در فصل‌های بعد خواهید دید، حتی می‌توان این فرم را ضعیف‌تر هم کرد تا کار انتخاب تابع تقریب ساده‌تر شود.⁵¹

به فرض این‌که ϕ بتواند هر شکلی به خود بگیرد (یعنی هر تابعی ممکن باشد یا به عبارت دیگر از فضای بی‌نهایت بعدی انتخاب شود)، اگر به ازای هر تابع وزنی این انتگرال صفر شود، آن‌گاه می‌توانیم بگوییم که پاسخ به دست آمده، پاسخ دقیق مساله است. اما در عمل ما چنین نمی‌کنیم. خواهید دید که ما ϕ را در فضایی با ابعاد محدود تشکیل می‌دهیم و این انتگرال را برای هر تابع وزنی نمی‌آزماییم.

⁴⁷ Strong

⁴⁸ Classic

⁴⁹ Weak

⁵⁰ Distributed sense

⁵¹ لازم به ذکر است که فرم ضعیف و ضعیف‌تر الزاماً به معنای بد بودن پاسخ نیستند. آن‌ها تنها فرمول‌بندی‌هایی هستند که باعث سادتر شدن کار برای روش‌های عددی می‌شود.

در این جا دو مساله در مورد روش باقیمانده‌ی وزن دار مطرح می‌شود: یکی انتخاب تابع وزنی است و دیگری چگونگی به کارگیری آن در عمل و ساده‌سازی‌های ممکن که منجر به فرم ضعیف‌تر ولی پراستفاده آن می‌شود. اما در این جا به این دو مورد نمی‌پردازم و جواب سوال اول را ماکول به بخش بعد (تقریب تابع) و سوال دوم را به فصل دوم که نحوه‌ی به کارگیری این روش را به طول عملی نشان خواهم داد می‌کنم.

(۲-۱) تقریب توابع^{۵۲} و فرم تقریبی فراتابع

ایده اصلی استفاده از روش‌های عددی در الکترومغناطیس (و به طور کلی هر فرمول‌بندی فیزیکی دیگری)، تبدیل مساله از فضای پیوسته به فضایی با ابعاد محدود است تا بتوان از کامپیوتر برای حل آن‌ها بهره جست. در قسمت‌های قبل ضمن معرفی مختصر روش‌های عددی گوناگون، به توضیح روش وردشی (و هم‌تای‌اش، یعنی روش باقیمانده وزن دار) پرداختم و بیان کردم که با استفاده از این روش می‌توان مساله‌ی حل مستقیم یک PDE را به ایستاسازی (یا صفر کردن باقیمانده وزن دار) یک فراتابع تبدیل کرد. در قسمت‌های قبلی توضیحی درباره چگونگی این کار ندادم. در عمل چنین کاری در حساب وردشی به طور مستقیم انجام نمی‌شود، بلکه پس از نوشتن فراتابع آن را به معادله دیفرانسیل متناظر برمی‌گردانند و آن معادله را حل می‌کنند (و البته لازم است ذکر کنم که مساله در آن جا دیگر تبدیل یک PDE به فراتابع نیست، بلکه مساله به طور مستقیم در فضای وردشی تعریف می‌شود: مثلاً اصل همیلتونی که منجر به مکانیک لاگرانژی می‌شود) [12]. در نتیجه پس از به دست آوردن فراتابع مساله، می‌بایست آن را به صورتی درآورند که توسط روش‌های عددی قابل حل باشد. برای این کار می‌بایست فضای بی‌نهایت بعدی مساله را با فضایی با ابعاد محدود تقریب بزنند. می‌توان نوشت:

$$\tilde{\phi} = \sum_{j=1}^N \phi_j N_j = \{\phi\}^T \{N\} = \{N\}^T \{\phi\} \quad (1-16)$$

⁵² Approximation of functions

که در آن N_j ها گسترش^{۵۳} (پایه^{۵۴}، درون یابی^{۵۵}) هستند و ϕ_j ها مقادیر مجهولی^{۵۶} هستند که به کمک توابع گسترش، $\tilde{\phi}$ را که تقریبی از ϕ است می سازند. نماد $\{.\}$ نشان گر ماتریس است و T هم ترانپوز^{۵۷} ماتریس.

حال این تقریب را در فرمی که از اصل وردشی به دست آوردیم جای گزین می کنیم. تنها قبل از ادامه برای سادگی فرض می کنیم که مقادیر حقیقی هستند و در نتیجه تعریف ضرب داخلی به صورت زیر باشد:

$$\langle \phi, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \phi \varphi^* d\Omega \quad \xRightarrow{\phi \& \varphi \text{ are real}} \quad = \int_{\Omega} \phi \varphi d\Omega \quad (1-17)$$

علاوه بر آن فرض می کنیم که اپراتور ما خطی باشد تا بتوانیم بنویسیم:

$$L(\{N\}^T \{\phi\}) = L(\{N\}^T) \{\phi\} \quad (1-18)$$

با استفاده از این فرض می توانیم بنویسیم:

$$F(\{N\}^T \{\phi\}) = \frac{1}{2} \{\phi\}^T \left[\int_{\Omega} \{N\} L(\{N\}^T) d\Omega \right] \{\phi\} - \{\phi\}^T \int_{\Omega} \{N\} f d\Omega \quad (1-19)$$

⁵³ Expansion

⁵⁴ Basis function

⁵⁵ Interpolation

⁵⁶ به این مقادیر مجهول، درجات آزادی (degrees of freedom) سیستم می گویند.

⁵⁷ Transpose

می‌دانیم که برای رسیدن به پاسخ می‌بایست فراتابع به دست آمده، ایستا باشد. شرط ایستایی به این مفهوم است که به ازای هر تغییر دیفرانسیلی در تابع مورد نظر (ϕ در این جا)، تغییر فراتابع صفر باشد. با دقت در تعریف تقریب متوجه می‌شویم که نتیجه تقریب، تبدیل همان تابع ϕ به تابعی است که توسط مجموعه‌ای از توابع گسترش ثابت و مقادیر نامشخص (درجات آزادی) توصیف می‌شود. پس شرط ایستایی به شکل زیر درمی‌آید:

$$\delta F(\phi) = \delta F(\{N\}^T \{\phi\}) = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\phi\}} \right\} \{\delta \phi\} = 0 \quad (1-20)$$

و از آن جا که این رابطه باید به ازای هر تغییر در ϕ برقرار باشد، پس خواهیم داشت:

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\phi\}} \right\} = \{0\} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \phi_j} = 0 \quad (1-21)$$

یعنی مشتق جزئی فراتابع نسبت به هر کدام از درجات آزادی‌اش باید صفر شود. پس می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial F}{\partial \phi_i} = \frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} N_i L(\{N\}^T) d\Omega \right] \{\phi\} + \{\phi\}^T \left[\int_{\Omega} \{N\} L N_i d\Omega \right] - \int_{\Omega} N_i f d\Omega = 0 \quad (1-22)$$

$$i = 0, 1, \dots, N$$

که در صورت گسترش ماتریس‌ها، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial F}{\partial \phi_i} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \phi_j \left[\int_{\Omega} [N_i L(N_j) + N_j L(N_i)] d\Omega \right] - \int_{\Omega} N_i f d\Omega = 0 \quad (1-23)$$

$$i = 0, 1, \dots, N$$

و در صورتی که از خاصیت خودالحاقی استفاده کنیم، می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{\partial F}{\partial \phi_i} = \sum_{j=1}^N \phi_j \left[\int_{\Omega} N_i L(N_j) d\Omega \right] - \int_{\Omega} N_i f d\Omega = 0 \quad (1-24)$$

$$i = 0, 1, \dots, N$$

می‌توان شرط ایستایی یک فراتابع را که با تعدادی تابع پایه تقریب زده شده است به صورت زیر نوشت:

$$[K][\phi] = [F] \quad (1-25)$$

[K] (که در بعضی از متن‌ها با [S] -به معنای stiffness (سختی)- هم نشان‌اش می‌دهند⁵⁸) و [F] (که به آن جمله تحریک یا منبع هم می‌گویند) به صورت زیر محاسبه می‌شود و $[\phi]$ هم ماتریس ستونی مقادیر مجهول است:

$$K_{ij} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [N_i L(N_j) + N_j L(N_i)] d\Omega = \int_{\Omega} N_i L(N_j) d\Omega \quad (1-26)$$

$$F_i = \int_{\Omega} N_i f d\Omega \quad (1-27)$$

(توجه کنید که عبارت دوم برای [K] تنها در حالت خودالحاقی اپراتور درست است.) پس خواهیم داشت:

$$[\phi] = [K]^{-1}[F] \quad (1-28)$$

⁵⁸ بیش‌تر متن‌های کاربرد FE در مکانیک -اولین زمینه مهندسی که این روش به کار رفته است- و همچنین بعضی از متون الکترومغناطیسی که notation مکانیکی‌ها را حفظ کرده‌اند.

در نتیجه، مساله تبدیل به یک مساله ماتریسی معمول شد که روش‌های گوناگونی برای حل‌اش موجود است. حال ما مقادیر درجات آزادی را به دست آورده‌ایم و دیگر مقدار نامعلومی برای‌مان نیستند. در نتیجه می‌توانیم این مقادیر را به عنوان ضرایب توابع گسترش قرار دهیم و مقدار تقریبی تابعی را که مساله وردشی ما را ایستا کرده است به دست بیاوریم. توجه کنید که در این‌جا پاسخ به دست آمده، تنها تقریبی از پاسخ واقعی است. این روش -استفاده از اصل وردشی برای به‌دست آوردن فراتابع و تقریب تابع- به روش رایلی- ریتز⁵⁹ (یا ریتز) مشهور است.

حل همین مساله با استفاده از فرمول‌بندی باقیمانده وزن‌دار نیز به همین صورت است:

ابتدا می‌بایست برای مساله‌مان گسترشی تقریبی با ابعاد محدود انتخاب کنیم. تعداد این توابع پایه مستقل خطی را N در نظر می‌گیریم (یا به عبارت دیگر، تعداد درجات آزادی‌مان را N می‌گیریم). این کار درست مثل قسمت قبل است. اما در این‌جا برخلاف روش پیشین می‌بایست تابع وزنی‌ای نیز برگزینیم. لازم به ذکر است که تعداد توابع وزنی اختیاری‌ست. اما اگر بخواهیم مساله‌مان حتما پاسخی یکتا داشته باشد، تعداد این توابع باید همان N باشد تا ماتریس مربعی شود⁶⁰. در صورتی که تعداد این نقاط بیش‌تر باشد، می‌بایست از روشی چون SVD^{61} [14] که روشی مبتنی بر کم‌ترین مربعات است استفاده نمود. داریم:

$$W(\{N\}^T \{\phi\}, \psi) = \int_{\Omega} \psi^* \cdot R(\{N\}^T \{\phi\}) d\Omega = \int_{\Omega} \psi^* \cdot [L(\{N\}^T \{\phi\}) - f] d\Omega \quad (1-29)$$

اگر مثل قبل فرض کنیم که اپراتورمان خطی است می‌توانیم به رابطه زیر برسیم (توجه کنید که فرض خطی بودن اپراتور، در مسایل فیزیکی کاملا معقول است):

⁵⁹ Rayleigh - Ritz

⁶⁰ البته این به فرض این است که ماتریس singular نباشد.

⁶¹ Singular Value Decomposition

$$W(\{N\}^T \{\phi\}, \psi) = \left[\int_{\Omega} \psi^* \cdot L(\{N\}^T) d\Omega \right] \{\phi\} - \int_{\Omega} \psi^* \cdot f d\Omega \quad (1-30)$$

با صفر کردن این انتگرال، می‌توانیم باقیمانده را از نظر وزنی (یا به عبارت دیگر، به شکلی گسترده و نه نقطه به نقطه) صفر کنیم. همان‌طور که در قبل گفتیم، برای تابع وزنی نیز باید گسترشی محدود در نظر گرفت. فرض کنیم تعداد این گسترش‌ها — که درست مثل گسترش خود تابع تعریف می‌شود — همان N باشد. گرچه در اگر تعداد هر مقدار دیگری هم باشد، تفاوتی در نوشتن فرم کلی آن نخواهیم داشت. تنها حل ماتریس حاصل متفاوت خواهد شد. با جای‌گذاری خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} W(\{N\}^T \{\phi\}, \psi_1) &= \left[\int_{\Omega} \psi_1^* \cdot L(\{N\}^T) d\Omega \right] \{\phi\} - \int_{\Omega} \psi_1^* \cdot f d\Omega = \sum_{j=1}^N \left[\int_{\Omega} \psi_1^* \cdot L(N_j) d\Omega \right] \phi_j - \int_{\Omega} \psi_1^* \cdot f d\Omega \dots \\ W(\{N\}^T \{\phi\}, \psi_i) &= \left[\int_{\Omega} \psi_i^* \cdot L(\{N\}^T) d\Omega \right] \{\phi\} - \int_{\Omega} \psi_i^* \cdot f d\Omega = \sum_{j=1}^N \left[\int_{\Omega} \psi_i^* \cdot L(N_j) d\Omega \right] \phi_j - \int_{\Omega} \psi_i^* \cdot f d\Omega \\ &\dots \\ W(\{N\}^T \{\phi\}, \psi_N) &= \left[\int_{\Omega} \psi_N^* \cdot L(\{N\}^T) d\Omega \right] \{\phi\} - \int_{\Omega} \psi_N^* \cdot f d\Omega = \sum_{j=1}^N \left[\int_{\Omega} \psi_N^* \cdot L(N_j) d\Omega \right] \phi_j - \int_{\Omega} \psi_N^* \cdot f d\Omega \end{aligned} \quad (1-31)$$

تبدیل این فرم به حالت ماتریسی چندان پیچیده نیست. به سادگی دیده می‌شود که هر کدام از مولفه‌های ماتریس به شکل زیر است:

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \psi_i^* \cdot L(N_j) d\Omega \quad (1-32)$$

$$F_i = \int_{\Omega} \psi_i^* \cdot f d\Omega \quad (1-33)$$

همان طور که قبلاً گفتم، انتخاب‌های متنوعی برای توابع وزنی در روش باقیمانده وزنی داریم. در اینجا بعضی از مشهورترین روش‌ها را بیان می‌کنم:

۱-۲-۱) روش تطبیق نقطه‌ای^{۶۲}

توابع وزنی در این روش، توابع دلتای دیراک هستند [1]. یعنی:

$$\psi_i = \delta(x - x_i, y - y_i, z - z_i) \quad (1-34)$$

که (x_i, y_i, z_i) بردار ثابتی است که برای هر تابع وزنی به طور جداگانه تعریف می‌شود. برای مشخص شدن چگونگی عمل کرد این تابع وزنی، لازم است که به خاصیت غربال‌گری^{۶۳} تابع دلتا توجه شود:

$$\int_{\Omega} f(r) \delta(r - r_0) d\Omega = f(r - r_0) \quad (1-35)$$

با توجه به این خاصیت، می‌توان دید که مقدار انتگرال باقیمانده وزن‌دار تبدیل به مقدار تابع در نقطه‌ای که توسط تابع وزنی مشخص شده است می‌شود. نتیجه این است که مقدار باقیمانده تنها در یک سری نقاط محدود مشخص شده توسط تابع وزنی صفر می‌شود. به عبارت بهتر با انتخاب این تابع وزنی، برقراری شرط صفر بودن باقیمانده را در یک سری از نقاط اعمال کرده‌ایم و به دیگر نقاط کاری نداشته‌ایم. این روش دقت نسبتاً کمی دارد اما در عوض پیاده‌سازی آن بسیار ساده‌تر از سایر روش‌هاست و نیازی به هیچ‌گونه انتگرال‌گیری (چه عددی و چه آنالیتیک) ندارد. برای این‌که این روش پاسخ‌های نسبتاً خوبی بدهد، می‌بایست انتخاب آن نقاط (یا توابع وزن‌دار) دقیق باشد. به کارگیری این نوع تابع وزنی با اپراتور L دیفرانسیلی، معادل استفاده از فرمول‌بندی FD برای مساله است.

⁶² Point Matching (Point Collocation Method)

⁶³ Sifting

۱-۲-۲) روش هم‌مکانی زیردامنه‌ای^{۶۴}

در این روش، کل فضای مکانی^{۶۵} مساله به تعدادی زیرناحیه^{۶۶} تقسیم می‌شود. به هر کدام از این زیرناحیه‌ها، تابع وزنی مستقل ثابتی اختصاص داده می‌شود که تنها در همان ناحیه از کل فضا مقدار دارد و در بقیه مناطق صفر است. یعنی می‌توانیم بنویسیم [1]:

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i$$

$$\forall i, j; i \neq j \Rightarrow \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \quad (1-36)$$

$$\psi_i(r) = \begin{cases} 1 & r \in \Omega_i \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

به عبارت دیگر Ω_i ها ناحیه را افراز می‌کنند.

می‌توان گفت که این تابع وزنی، در یک ناحیه محدود میانگین مقدار تابع تقریب را محاسبه می‌کند و صفر کردن آن به معنای صفر کردن آن تابع در یک ناحیه محدود است. این اولین جایی است که با ایده تقسیم ناحیه فضایی به تعدادی زیرناحیه مواجه می‌شوم. FE در اصل نوعی گسترش و تکمیل این روش است که قسمت اعظم این نوشتار را در برخواهد گرفت.

⁶⁴ Subdomain Collocation

⁶⁵ تاکید بر لفظ **مکانی** به این دلیل است که ممکن است منظور از فضای مساله، فضای پارامتری آن و یا چیزی مشابه باشد.

⁶⁶ Subdomain

۱-۲-۳) روش گالرکین

تابع وزنی گالرکین، یکی از مشهورترین توابع وزنی‌ایست که در روش‌های عددی‌ای چون MoM و FE به کار می‌رود. در این روش، توابع وزنی درست همان توابع گسترشی هستند که برای تقریب تابع به کار می‌روند [1]. به عبارت دیگر داریم:

$$\psi_i = N_i \quad (1-37)$$

با این‌که هنوز چندان وارد جزئیات روش FE نشده‌ایم، ولی لازم است ذکر شود که این توابع وزنی می‌توانند در کل حوزه مکانی تعریف شوند یا در زیرحوزه‌ها (مانند روش قبل). در هر دو صورت، روش گالرکین تعریف شده است. علاوه بر این، می‌توان از دید دیگری نیز به روش گالرکین نگاه کرد. در فرمول‌بندی کلی روش باقیمانده‌های وزنی داشتیم:

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \psi_i^* \cdot L(N_j) d\Omega \quad (1-38)$$

و در فرمول‌بندی روش وردشی نیز به دست آوردیم:

$$K_{ij} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [N_i L(N_j) + N_j L(N_i)] d\Omega = \int_{\Omega} N_i L(N_j) d\Omega \quad (1-39)$$

که جمله دوم هنگامی به دست می‌آید که اپراتورمان خودالحاق باشد. با مقایسه این دو عبارت به راحتی دیده می‌شود که در صورتی که ψ_i^* برابر با همان تابع گسترش باشد، فرمول‌بندی باقیمانده وزن‌دار و فرمول‌بندی‌ای که از اصل وردشی به دست می‌آید برابر می‌شود. به همین دلیل، روش گالرکین به همراه روش به دست آمده از اصل وردشی، روش اصلی به دست آوردن فرمول‌بندی مورد نیاز در FE است. حتی در بسیاری از کتاب‌ها به دلیل سادگی فرمول‌بندی روش باقیمانده وزن‌دار نسبت به روش مبتنی بر اصل

وردشی (که الزاما همیشه به دست آوردن فراتابع از آن طریق ساده نیست) این روش ترجیح داده شده است. ماتریس [K] حاصل در صورت خودالحاقی اپراتور L ، متقارن است. سرعت هم‌گرایی این روش، متناسب با توان اول نرم^{۶۷} خطاست. یعنی:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|L\tilde{\phi} - f\|_2 \rightarrow 0 \quad (1-40)$$

در قسمت بعد خواهید دید که روشی که مبتنی بر LSE^{68} است دارای سرعت هم‌گرایی بالاتر است.

۱-۲-۴) روش کم‌ترین مربعات^{۶۹}

می‌توان به جای این که سعی کرد خطا صفر شود، کاری کرد که توان دوم خطا مینیمم شود. این ایده‌ایست بسیار متداول که عملا در بسیاری از مسایل مدل‌سازی به کار می‌رود و حتی می‌توان گفت که کاربرد آن گسترده‌تر از صفر کردن خود خطاست. در نتیجه می‌توان نوشت [۱]:

$$F(\tilde{\phi}) = \langle R(\tilde{\phi}), R(\tilde{\phi}) \rangle = \int_{\Omega} R(\tilde{\phi}) \cdot R(\tilde{\phi})^* d\Omega \quad (1-41)$$

می‌توان شرط ایستایی را نوشت و این انتگرال را مانند قبل به صورت تقریبی گسترش داد. نتیجه بدین صورت است:

$$\delta F(\tilde{\phi}) = 0 \Rightarrow \delta F(\tilde{\phi}) = \sum_{i=1}^N \left[2 \int_{\Omega} \frac{\partial R^* (\{N\}^T \{\phi\})}{\partial \phi_i} \cdot R(\{N\}^T \{\phi\}) d\Omega \right] \delta \phi_i = 0 \quad (1-42)$$

⁶⁷ $\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^N |u_i|^2} = \langle \{u\}, \{u\} \rangle = \{u\}^T \{u^*\}$

⁶⁸ Least Square Error

⁶⁹ Least Square Method

و چون به ازای هر $\delta\phi_i$ (و مستقل از آن) این عبارت می‌بایست صفر شود، پس داخل کروشه صفر خواهد بود. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial R^*({N}^T\{\phi\})}{\partial \phi_i} \cdot R({N}^T\{\phi\}) d\Omega = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} \quad (1-43)$$

با مقایسه این رابطه و عبارت کلی باقیمانده وزن دار، می‌بینیم که تابع وزنی به صورت زیر است:

$$\psi_i = \frac{\partial R^*({N}^T\{\phi\})}{\partial \phi_i} = \frac{\partial (L({N}^T\{\phi\} - f)^*)}{\partial \phi_i} = L^*(N_i) \quad (1-44)$$

توجه به این نکته جالب است که برخلاف روش‌های دیگر وزنی، در این روش ابتدا تابع وزنی را تعریف نکردیم، بلکه ابتدا فرم کلی انتگرال و شرط مینیمم شدن را برگزیدیم و سپس شکل تابع وزنی به دست آمد. از طرف دیگر علت اصلی انتخاب تابع خطای درجه ۲ (و نه درجه دیگر) موردی است که اغلب به آن توجهی نمی‌شود. دلیل اصلی این کار، فرض نرمال بودن توزیع نویزی است که بر یک سیستم وارد شده است [14]. در مسایل مدل‌سازی یک سیستم از روی اطلاعات نمونه‌برداری شده، این نویز به شکل نویز بر اطلاعات ورودی در نظر گرفته می‌شود و در این‌جا، این نویز به شکل خطای حاصل از تقریب ظاهر می‌شود. یعنی این خطا به صورت نرمال توزیع می‌شود. در صورتی که توزیع شکل‌های دیگری داشته باشد، توابع خطای دیگری باید استفاده می‌شود. برای توضیحات بیش‌تر به [14] مراجعه کنید.

در آخر این را باید ذکر کنم که هم‌گرایی این روش به میزان زیر است:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|L\tilde{\phi} - f\|_2^2 \rightarrow 0 \quad (1-45)$$

که به دلیل بالاتر بودن توان خطا، دارای هم‌گرایی سریع‌تری نسبت به روش گالرکین است [15].
با این وجود از این روش در FE و EM چندان استفاده نمی‌شود. دلیل اصلی این است که با چنین فرمول‌بندی‌ای، استفاده از شرایط مرزی برای ساده‌سازی مساله (آن‌طور که در فرم ضعیف‌تر روش باقیمانده وزن‌دار استفاده می‌شود) ممکن نخواهد بود.

۱-۲-۵) تقریب محیط با عناصر محدود

در قسمت قبل دیدید که بعضی از روش‌های تقریب تابع در یک زیرناحیه از کل فضای مساله تعریف می‌شوند. به عبارت بهتر، به جای این که سعی کنند با N تابع پایه، کل فضا را پوشش دهند، ابتدا فضا را به تعدادی زیرناحیه تقسیم می‌کنند و سپس در هر کدام از آن‌ها، توابع پایه خود را تعریف می‌کنند.
روش FE، یکی از روش‌هایی است که اصول اولیه‌اش بر همین تقسیم‌بندی‌ست. در این روش، کل ناحیه به تعدادی زیرناحیه تقسیم می‌شود و سپس در هر کدام از این زیرناحیه‌ها (که به آن‌ها المان^{۷۰} می‌گویند)، تابع تقریبی که در فراتابع قرار می‌گیرد تعریف می‌شود. مساله در هر کدام از این المان‌ها به طور جداگانه حل می‌شود و در نهایت به نحوی با هم ترکیب می‌شود.
عمل تقسیم ناحیه به المان‌ها را تولید مش^{۷۱} می‌نامند. المان‌ها می‌تواند شکل‌های مختلفی داشته باشد. متداول‌ترین المان‌های ۲ بعدی این‌ها هستند:

- مثلث
- مستطیل

و در حالت ۳-بعدی نیز المان‌های زیر استفاده می‌شوند:

^{۷۰} Element

^{۷۱} Mesh generation

- چهاروجهی^{۷۲}
- منشور مثلثی^{۷۳}
- مکعب مستطیل^{۷۴}

استفاده از هر کدام بستگی به شرایط و کاربرد دارد. به عنوان مثال اگر شکل اولیه ما دارای مرز پله‌ای باشد، استفاده از مستطیل (برای حالت ۲ بعدی) و مکعب مستطیل (برای حالت ۳ بعدی) کار مش‌بندی را راحت می‌کند. اما اگر شکل کلی باشد، استفاده از مثلث و یا چهاروجهی باعث ایجاد مش دقیق‌تری می‌شود. مش‌بندی یکی از قسمت‌های اصلی FE است. مش‌بندی مناسب باعث بالا رفتن دقت (و پایین آمدن خطای مش) می‌شود. اما مش‌بندی به طور کلی کار آسانی نیست و مش‌بندی یک شکل به طور کلی، کار بسیار پیچیده‌ایست.

در مورد مش‌بندی به طور کلی در این پایان‌نامه صحبتی نخواهم کرد و تنها چند مورد خاص از مش‌بندی را حل خواهم کرد. اما مناسب است که گفته شود که می‌توان مش‌بندی را به دو دسته تقسیم کرد:

- ساختاردار^{۷۵}
- بی‌ساختار^{۷۶}

مش‌بندی ساختاردار، مش‌بندی‌ایست که توسط المان‌های منظم مش‌بندی شده باشد. این روش برای اجسام هندسی مشخص و ساده به کار می‌رود. اما از طرف دیگر، ما هنگامی از مش‌بندی بی‌ساختار

⁷² Tetrahedron

⁷³ Triangular prism

⁷⁵ Structured

⁷⁶ Unstructured

⁷⁴ که به آن brick هم می‌گویند.

استفاده می‌کنیم که شکل فضای مان کلی باشد و نتوان الگوریتم مشخصی برای تقسیم آن به المان‌ها بیان کرد. برای همین الگوریتم‌های کلی‌ای برای مش‌بندی چنین شکل‌هایی معرفی می‌شوند که می‌توان به الگوریتم Delaunay برای مثلث‌بندی اشاره کرد. مش‌بندی‌بندی یکی از بخش‌های مهم FEM است و برای به دست آوردن پاسخ‌های دقیق و مناسب می‌بایست مش‌بندی خوب و مناسبی داشت. برای اطلاعات بیش‌تر درباره تولید مش می‌توانید به [16] مراجعه کنید.

۱-۳) روش اجزا محدود

تا به حال درباره روش‌های عددی به طور کلی صحبت کردم. این‌که اصول اولیه حاکم بر آن‌ها چیست و چگونه مساله‌ای پیوسته و با بعد نامحدود را تبدیل به مساله‌ای تقریبی با ابعاد محدود می‌کنند. روی‌کرد اصلی در این نوشته تا به حال استفاده از اصل وردشی و یا باقیمانده وزن‌دار بود. این‌ها، روش‌هایی هستند که در FEM و MoM به طور مشترک به کار می‌روند (به طور دقیق‌تر، روش باقیمانده وزن‌دار بین هر دوی‌شان مشترک است). در نتیجه قسمت‌های قبل کمابیش برای هر دو یکسان بود. حال می‌خواهم به خود روش FE پردازم و تفاوت‌های آن با حالت کلی قبلی را بیان کنم.

روش اجزاء محدود، مبتنی بر تقسیم کل ناحیه مساله به تعدادی زیرناحیه است و حل معادله دیفرانسیل مساله در هر کدام از آن زیرناحیه‌ها به طور مجزا است. به عبارت دیگر، پس از به دست آوردن فراتابع از یکی از دو روش اصل وردشی یا باقیمانده وزن‌دار، آن فراتابع را در هر کدام از المان‌های محدود به طور مجزا ایستا می‌کنیم. این به آن معناست که در هنگامی که در همه المان‌ها پاسخ محلی مساله ایستا شده باشد، آن‌گاه می‌توان گفت که کل مساله نیز به حالت ایستایی رسیده است. تقریبی که در این‌جا زده می‌شود، تقریب ناشی از عدم دقت هر کدام از المان‌هاست.

شاید این سوال پیش بیاید که چرا چنین کاری می‌کنیم و به طور مستقیم کل سیستم را با تعدادی تابع پایه تقریب نمی‌زنیم؟ پاسخ این است که در این حالت لازم نیست توابع گسترش‌مان آن‌قدر کامل^{۷۷} (که معادل بالا رفتن ابعاد مساله می‌شود) باشد که بتواند هر نوع تابعی را با دقت بالایی تخمین بزند. می‌توان از توابع گسترش غیردقیق‌تری (یعنی تعداد تابع گسترش کم‌تر) استفاده کرد چون تنوع تابع پاسخ در یک المان مسلماً بسیار کم‌تر از کل ناحیه است. می‌توان مزیت اصلی FE را چنین دانست:

FEM توانایی حل هر نوع مساله‌ای با هر نوع هندسه و تنوع جنس ماده^{۷۸} را بدون تغییر

فرمول‌بندی و کد برنامه دارد [1].

هم‌چنین ویژگی بارزش نسبت به روش‌های دیگر مخصوصاً MoM در تنک^{۷۹} بودن ماتریس حاصل است. می‌توان گفت که حافظه مورد نیاز برای ذخیره‌سازی ماتریس حاصل $O(N)$ است که N تعداد درجات آزادی مساله است. برخلافش در روشی چون MoM، این فضای ذخیره‌سازی از مرتبه $O(N^2)$ است [۱۵].

اصول کلی روش FE به صورت زیر است:

۱. به دست آوردن فراتابع مساله‌ای که توسط PDE با شرایط مرزی مشخص شده است با استفاده از

یکی از دو روش زیر:

- اصل وردشی

- باقیمانده‌های وزنی

۲. انتخاب نوع المان و تقریب درون المان و تبدیل فراتابع به فرم ضعیف‌تر با استفاده از تقریب در

محدوده المان

۳. محاسبه ماتریس‌های لازم در سطح المان

۴. جمع‌آوری کردن ماتریس‌های محلی و به دست آوردن ماتریس کل مساله

۵. اعمال شرایط مرزی

^{۷۷} Complete

^{۷۸} که باعث inhomogeneity مساله می‌شود.

^{۷۹} Sparse

۶. حل ماتریس حاصل به منظور محاسبه مجهولات (درجات آزادی)

۷. پس پردازش‌های^{۸۰} لازم

در فصل بعد به طور دقیق و مشخص این مراحل را نشان خواهیم داد.

⁸⁰ Post-processing

"Everything should be made as simple as possible, but not simpler."

– A. Einstein

فصل دوم

حل مسایل الکترومغناطیس به کمک روش اجزاء محدود

۲-۱) مقدمه

در فصل قبل شمای کلی‌ای از چگونگی به کارگیری روشی عددی برای حل یک مساله PDE نوعی را توضیح دادم. تاکید بیشتری بر روش‌های مبتنی بر فراتابع کردم چون روش FE - که موضوع بحث‌مان است - بر همین پایه استوار است. در این فصل با جزئیات بیشتری به این موضوع خواهم پرداخت. بدین معنی که فرمول‌بندی FEM را برای گستره‌ای از مسایل الکترومغناطیسی به دست خواهم آورد. بدین نحو هم چگونگی استفاده از ایده‌های ریاضی فصل قبل مشخص می‌شود و هم فرمول‌بندی نسبتاً کلی‌ای برای طیفی از مسایل الکترومغناطیس به دست می‌آید.

مسایلی که در این فصل مطرح می‌شوند، مسایل کلی ۱-بعدی و ۲-بعدی الکترومغناطیسی هستند. مساله‌های ۱-بعدی الکترومغناطیسی معمولاً آن‌قدر پیچیده نیستند که نتوان راه حلی ساده (و اغلب آنالیتیک) برای آن‌ها یافت. در نتیجه به کارگیری FEM برای‌شان بیشتر جنبه آموزشی دارد. اما برخلاف آن‌ها، مسایلی کاربردی‌ای در فضای ۲-بعدی مطرح می‌شوند. با این‌که در واقعیت، انتشار موج و به طور کلی پدیده‌های الکترومغناطیسی ماهیتی ۳-بعدی دارند اما در بسیاری از موارد می‌توان آن‌ها را به یک مساله ۲-بعدی تقریب زد. به عنوان نمونه‌ای از چنین مسایلی می‌توان به حل موج بر (ثابت انتشار، توزیع میدان، تلف و ...)، حل مدارات میکرواستریپ^۱ با مقطع ثابت (به دست آوردن پارامترهای مداری) و همچنین محاسبه پرتو Scattering اجسام با همان شرط قبلی اشاره کرد.

روش کلی حل یک مساله با استفاده از FEM - همان‌طور که در فصل پیش گفتم - به صورت زیر است:

^۱ Microstrip

۱. به دست آوردن فراتابع مساله‌ای که توسط PDE با شرایط مرزی مشخص شده است با استفاده از

یکی از دو روش زیر:

- اصل وردشی
- باقیمانده‌های وزنی

۲. انتخاب نوع المان و تقریب درون المان و تبدیل فراتابع به فرم ضعیف‌تر با استفاده از تقریب در

محدوده المان

۳. محاسبه ماتریس‌های لازم در سطح المان

۴. جمع‌آوری ماتریس‌های محلی و به دست آوردن ماتریس کل مساله

۵. اعمال شرایط مرزی

۶. حل ماتریس حاصل به منظور محاسبه مجهولات (درجات آزادی)

۷. پس‌پردازش‌های لازم

روش کلی قسمت (۱) در فصل پیش گفته شد. در این فصل نیز برای مسایل الکترومغناطیسی مورد

نظر در حالت ۱-بعدی و ۲-بعدی این را به دست خواهیم آورد تا مراحل این کار به طور دقیق مشخص شود.

درباره نوع المان و تقریب بخش (۲) چندان صحبتی در فصل پیش نکردم و تنها به بیان فرم کلی‌اش

بسنده کردم. در این فصل المان خط با تقریب چند جمله‌ای مرتبه اول برای حالت ۱-بعدی و المان مثلث با

تقریب چند جمله‌ای مرتبه اول برای حالت ۲-بعدی مطرح می‌شود. گرچه بحث درباره انواع المان‌ها بسیار

مفصل است که در این پایان‌نامه چندان به آن نخواهم پرداخت.

در فصل پیش نیز درباره ماتریس‌هایی که از محاسبه تقریبی هر المان حاصل می‌شوند (بخش ۳) به

طور مشخص صحبتی نکردم. دلیل‌اش به سادگی این است که محاسبه این ماتریس‌های منوط به مشخص

بودن نوع المان و تقریب به کار گرفته در آن و همچنین نوع مساله است. در نتیجه این محاسبات به این

فصل موکول شد.

چگونگی جمع‌آوری ماتریس‌های حاصل را در این فصل برای حالت ۱-بعدی نشان خواهیم داد و شبه-برنامه‌ای هم برای این کار می‌نویسم. از آنجایی که برای این عمل تفاوت چندانی بین حالت ۱-بعدی و ۲-بعدی و هم‌چنین ۳-بعدی وجود ندارد، توضیح مفصلی برای حالت ۲-بعدی نخواهم داد.

اعمال شرایط مرزی یکی از مهم‌ترین قسمت‌های FEM است. چگونگی اعمال شرایط مرزی کاملاً بستگی به معادله PDE و نوع شرایط مرزی آن دارد. در بعضی از موارد این کار بسیار ساده است (مثلاً در مورد شرط مرزی نیومان^۲ که لزومی به اعمال آن وجود ندارد - در بخش مربوط در این باره توضیح خواهم داد) و در بعضی از موارد بسیار پیچیده است (مثلاً در حالت سه‌بعدی با المان‌های لاگرانژ^۳ و تحلیل تمام-موج^۴) که در فصل آتی به طور مفصل توضیح خواهم داد.

مرحله ۶ام یک مساله کلی FE، حل دستگاه حاصل با استفاده از روش‌های عددی است. این دستگاه ممکن است بیان‌گر یک معادله معین^۵ و یا یک معادله مقادیر ویژه^۶ باشد. روش‌های حل این دو متفاوت‌اند. در این پایان‌نامه، مساله مورد بحث از نوع مقادیر ویژه است ولی در این فصل بدون توجه به نوع مساله، معادله‌های PDE اولیه را (که در نهایت معین یا مقدار ویژه بودن مساله را مشخص می‌کند) تا حد ممکن به صورت کلی بیان می‌کنم. در هر دو صورت، پس از انجام این مرحله، مجهولاتی که در فرمول‌بندی به کار رفته‌اند به دست می‌آید.

پس‌پردازش‌هایی که در بخش (۷) از آن‌ها نام بردم -همان‌طور که از نام‌شان مشخص است- به پردازش‌هایی گفته می‌شود که جزء خود فرمول‌بندی FE نیست ولی در بعضی از موارد برای رسیدن به پاسخ مورد نظر لازم‌اند. به عنوان مثال فرض کنید که می‌خواهیم ظرفیت خازنی یک خط مایکرواستریب را به دست آوریم. برای انجام این کار می‌توان از فرمول‌بندی پتانسیل اسکالر الکتریکی استفاده کرد و پس از محاسبه توزیع پتانسیل، بار حاصل بر روی دیواره‌های فلزی را بر اختلاف پتانسیل دو دیواره تقسیم کرد. برای به دست آوردن بار، می‌بایست میدان الکتریکی را دانست و محاسبه میدان الکتریکی از روی پتانسیل

^۲ Neumann

^۳ Lagrange Elements

^۴ Full-wave analysis

^۵ Deterministic

^۶ Eigenvalue problem

نیز با استفاده از مشتق‌گیری از آن انجام می‌شود.^۷ صورت‌بندی اولیه مساله، تنها شامل محاسبه توزیع پتانسیل می‌شود و نه بیش‌تر، در حالی که بدون انجام مراحل بعدی به پاسخ مورد نظر نخواهیم رسید. در بخش‌های بعدی درباره ۵ قسمت اول به طور مفصل توضیح می‌دهم.

۲-۲) روش اجزا محدود ۱-بعدی

می‌توان یک PDE ۱-بعدی مرتبه ۲ را در حالت کلی به شکل زیر نوشت [۱۵]:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{d}{dx} \left(\alpha(x) \frac{d\phi(x)}{dx} \right) + \beta(x)\phi(x) = f(x) \\ \Omega = [0, L] \\ \phi|_{x=0} = p \quad \text{(Dirichlet Boundary Condition)} \\ \alpha \frac{\partial \phi}{\partial x} + \gamma \phi \Big|_{x=L} = q \quad \text{(Cauchy Boundary Condition)} \end{array} \right. \quad (2-1)$$

این فرم معادله دیفرانسیل مرتبه دوم در مسایل الکترومغناطیس بسیار ظاهر می‌شود. دامنه تعریف آن یک خط است که در این جا از 0 تا L تعریف شده و شرایط مرزی در دو نقطه ابتدا و انتها تعریف شده است. یکی از شرایط مرزی، شرط مرزی دیریچله ناهمگن^۸ است و دیگری شرط مرزی کوشی که به نام شرط مرزی نوع سوم هم شناخته می‌شود. اگر مقدار p برابر ۰ باشد، تبدیل به دیریچله همگن می‌شود و در صورتی که در شرط مرزی کوشی، مقدار q و γ هر دو ۰ باشد، آن‌گاه این تبدیل به شرط مرزی معروف نیومان می‌گردد. لازم است توجه کنید که این ترتیب ذکر شده برای شرط مرزی الزامی نیست (ترتیبی که نقطه ۰ دارای شرط مرزی دیریچله باشد و نقطه L دارای شرط دیگر)، بلکه هر نوع شرط مرزی‌ای برای هر کدام از این‌ها قابل قبول است.

^۷ البته در این جا جزییات بسیاری مانند چگونگی در نظر گرفتن ضریب دی‌الکتریک، چگونگی مشتق‌گیری، چگونگی محاسبه ماتریس ظرفیت هنگامی که چند هادی داشته باشد و ... وجود دارد که به دلیل ارتباط نداشتن به طور مستقیم به بحث‌مان از بیان‌اش صرف‌نظر می‌کنم.

^۸ Inhomogenous Dirichlet Boundary Condition

با تغییر پارامترهای این معادله می‌توان مسایل الکترومغناطیس بسیار زیادی را تعریف کرد. در این جا چند مثال می‌زنم:

فرض کنید دو صفحه فلزی موازی هم داشته باشیم. در آن صورت مساله پتانسیل زیر قابل تعریف است:

$$\text{Parallel Plate Capacitor : } \begin{cases} \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon} \\ V(0) = 0 \\ V(x_0) = V_0 \end{cases} \quad (2-2)$$

در این جا شرایط مرزی، هر دو از نوع دیریچله هستند - یکی همگن و دیگری ناهمگن. با جای‌گذاری‌های زیر در فرم کلی معادله دیفرانسیل، به همین معادله می‌رسیم:

$$\begin{cases} \phi(x) = V(x) \\ \alpha(x) = -1 \\ \beta(x) = 0 \\ f(x) = -\frac{\rho}{\epsilon} \end{cases} \quad (2-3)$$

البته این مساله حل آنالیتیک ساده‌ای دارد و تنها به عنوان نمونه مطرح شده است (همان‌طور که گفته شد تقریباً اکثر مساله‌های ۱-بعدی نسبتاً ساده هستند). به عنوان نمونه‌ای دیگر به یک مساله انتشار موج بین دو صفحه فلزی موازی توجه کنید. این مساله را می‌توان به شکل زیر فرمول‌بندی کرد [۱۵]:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\mu_r} \frac{d}{dx} E_y \right) + k_0^2 \epsilon_r E_y = f(x) \\ E_y = 0 \big|_{x=0, x_0} \end{cases} \quad (2-4)$$

شرایط مرزی در این جا هر دو از نوع دیریچله همگن هستند. معادل آن در فرم رابطه کلی به شکل زیر است:

$$\begin{cases} \phi = E_y \\ \alpha = -\frac{1}{\mu_r} \\ \beta = k_0^2 \varepsilon_r \\ \phi|_{x=0, x_0} = 0 \end{cases} \quad (2-5)$$

همان طور که دیده می شود این مساله، برخلاف مورد قبل یک مساله ویژه⁹ است.

تا این جا فرم کلی معادله دیفرانسیلی با مشتقات جزئی و شرایط مرزی ای را که در الکترومغناطیس به کار می رود دیدید. در بخش بعدی، با استفاده از ابزارهای فصل قبل، فراتابع معادله به دست می آید. برای این کار همان طور که قبلا گفته شد از دو روش مختلف اصل وردشی و باقیمانده وزن دار به طور مجزا استفاده می کنم.

۲-۱-۲-۱ محاسبه فراتابع با استفاده از روش رایلی-ریتز (اصل وردشی)

هنگام محاسبه فراتابع با استفاده از اصل وردشی، از رابطه زیر استفاده می کردیم و سپس آن را به طریقی که گفته شد ایستا می کردیم:

$$F(\phi) = \frac{1}{2} \langle L\phi, \phi \rangle - \frac{1}{2} \langle \phi, f \rangle - \frac{1}{2} \langle f, \phi \rangle \quad (2-6)$$

استفاده از چند فرض ساده کننده، باعث بهتر نشان داده شدن مساله می شود. اول فرض می کنیم اپراتور حقیقی باشند. این در مساله الکترومغناطیسی به آن معناست که محیط دارای تلفات دی الکتریک (یا ماده

⁹ Eigenproblem

مغناطیسی) نباشد. از طرف دیگر به علت انتخاب این نوع اصل وردشی ساده‌سازی دیگری نیز به طور ذاتی انجام شده است و آن هم همگن بودن شرایط مرزی‌ست. این مورد چندان قابل قبول نیست (مخصوصاً برای شرط دیریچله مگر هنگامی که مساله از نوع مساله‌ویژه باشد که شرط معمول نیزهمین است) ولی می‌توان نشان داد که در فرمول‌بندی نهایی همگن نبودن باعث تفاوت چندانی نمی‌شود [۱۱]. با این‌همه مساله را برای حالت کلی حل نمی‌کنم و تنها به فرمول‌بندی این حالت ساده‌شده اکتفا می‌کنم. با این وجود رابطه کلی در انتها نوشته خواهد شد و درستی آن اثبات می‌شود.

اگر رابطه حقیقی باشد، می‌توان نوشت:

$$F(\phi) = \frac{1}{2} \langle L\phi, \phi \rangle - \langle \phi, f \rangle \quad (2-7)$$

اپراتور L در این مساله بدین شکل است:

$$L = -\frac{d}{dx} \left(\alpha(x) \frac{d}{dx} \right) + \beta(x) \quad (2-8)$$

و با جای‌گذاری این دو رابطه خواهیم داشت:

$$F(\phi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[-\frac{d}{dx} \left(\alpha \frac{d\phi}{dx} \right) + \beta \phi \right] \phi \cdot dx - \int_{\Omega} f \phi \cdot dx = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{d}{dx} \left(\alpha \frac{d\phi}{dx} \right) \phi \cdot dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \beta \phi^2 \cdot dx - \int_{\Omega} f \phi \cdot dx \quad (2-9)$$

که دامنه تعریف $\Omega = [0, L]$ است. حال از انتگرال‌گیری جزء به جزء برای جمله اول استفاده می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$F(\phi) = -\frac{1}{2} \left[\phi \cdot \alpha \frac{d\phi}{dx} \Big|_{x=0}^L - \int_{\Omega} \alpha \frac{d\phi}{dx} \frac{d\phi}{dx} dx \right] + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \beta \phi^2 dx - \int_{\Omega} f \phi dx \quad (2-10)$$

از آن جایی که شرایط مرزی را همگن در نظر گرفته‌ایم، دو رابطه زیر را داریم:

$$\begin{aligned} \phi|_{x=0} &= 0 & (\text{Dirichlet Boundary Condition}) \\ \alpha \frac{\partial \phi}{\partial x} + \gamma \phi \Big|_{x=L} &= 0 \Rightarrow \alpha \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\gamma \phi \Big|_{x=L} \end{aligned} \quad (2-11)$$

پس می‌توان نوشت:

$$F(\phi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\alpha \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \beta \phi^2 \right] dx - \int_{\Omega} f \phi dx + \frac{1}{2} \gamma \phi^2 \Big|_{x=L} \quad (2-12)$$

توجه کنید که شرط مرزی دیریچله باعث صفر شدن یک مرز شده است. علاوه بر این بدیهی است که تفاوتی ندارد که کدام یک از دو مرز، دارای چه شرط مرزی‌ایست و تنها تفاوت در مکانی است که این جمله نوشته می‌شود. در ضمن اگر مقدار γ ، ۰ باشد (یعنی یا شرط مرزی نیومان باشد یا هر دو سمت از نوع دیریچله باشند) چنان جمله‌ای اصلاً در کار نخواهد آمد. این، فراتابع مورد نظر است.

اگر بخواهیم فرم کلی معادله را -که در آن شرایط مرزی می‌تواند ناهمگن باشد- به دست بیاوریم باید از اصل وردشی متفاوتی استفاده کنیم. بدون توضیح چگونگی به دست آوردنش، تنها پاسخ نهایی را در این جا می‌نویسم:

$$F(\phi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\alpha \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \beta \phi^2 \right] dx - \int_{\Omega} f \phi dx + \left[\frac{1}{2} \gamma \phi^2 - q \phi \right] \Big|_{x=L} \quad (2-13)$$

دیده می‌شود که تنها یک جمله مربوط به عدم همگنی شرط مرزی کوشی به فراتابع اضافه شد.

حال لازم است به چند نکته توجه شود. همان‌طور که از فرم نهایی برمی‌آید، جمله‌ای در فراتابع وجود دارد که به طور ضمنی^{۱۰} نقش شرط مرزی نوع کوشی را نشان می‌دهد. در حالی که چنین جمله‌ای برای شرط مرزی دیریچله وجود ندارد. نتیجه این که هنگام تولید فراتابع (و تقریب آن، کاری که خواهیم کرد) به طور خودکار شرط مرزی کوشی (ونیومان به عنوان حالت خاص‌اش) اعمال می‌شود در حالی که شرط مرزی نوع دیریچله باید جداگانه اعمال گردد. شرط مرزی اول را شرط مرزی ذاتی^{۱۱} می‌نامند و دومی را شرط مرزی ضروری^{۱۲، ۱۳}. به همین دلیل بهتر – و درست‌تر – است که تبدیل یافته PDE با چنین شرایط مرزی‌ای را به شکل فراتابع همراه با شرط اضافی مربوط به شرط مرزی ضروری به صورت زیر نشان دهیم:

$$\begin{cases} \delta F(\phi) = 0 \\ \phi|_{x=0} = p \end{cases} \quad (2-14)$$

توجه به این نکته کاملاً برای استفاده از روش FE ضروری است.

حال می‌خواهم درستی این فراتابع کلی را اثبات کنم. روشی که تا به حال استفاده می‌کردم این بود که با استفاده از اصل وردشی – که درستی‌اش را در فصل پیش نشان دادم – فراتابع معادله دیفرانسیل را به دست می‌آوردم. اما در بخش‌های قبل گفتم که چنان اصل وردشی‌ای برای مسایل ناهمگن درست نیست و تنها به ذکر پاسخ نهایی اکتفا کردم. با این حال می‌توان درستی رابطه به دست آمده را نشان داد. علاوه بر این، چگونگی تاثیر جمله‌های مربوط به شرایط مرزی ذاتی به زیبایی دیده می‌شود. با اعمال اپراتور وردشی در نقطه ایستایی شروع می‌کنم:

¹⁰ Implicit

¹¹ Natural B.C.

¹² Essential B.C.

¹³ در این پایان‌نامه معادل ذاتی را به جای طبیعی برای natural برگزیدیم به دلیل مفهوم این کلمه در مبحث که به معنای ذاتی، درونی و بدون نیاز به اعمال از خارج است.

$$\delta F(\phi) = 0 \Leftrightarrow \int_0^L \left[\alpha \left(\frac{d\phi}{dx} \right) \cdot \left(\frac{d(\delta\phi)}{dx} \right) + \beta\phi\delta\phi \right] dx - \int_0^L f\delta\phi dx + [(\gamma\phi - q)\delta\phi]_{x=L} = 0 \quad (2-15)$$

در این جا از خواص اپراتور وردشی استفاده شده است که برای اطلاعات بیشتر درباره‌شان می‌توانید به [۲] مراجعه کنید. با انتگرال گیری جزء به جزء خواهیم داشت:

$$\delta F(\phi) = \left\{ \alpha \frac{d\phi}{dx} \delta\phi \Big|_{x=0}^L - \int_0^L \left[\frac{d}{dx} \left(\alpha \frac{d\phi}{dx} \right) \delta\phi \right] dx \right\} + \int_0^L \beta\phi\delta\phi \cdot dx - \int_0^L f\delta\phi dx + [(\gamma\phi - q)\delta\phi]_{x=L} = 0 \quad (2-16)$$

و در $x=0$ چون مقدار ϕ ثابت است (مقدارش توسط شرط مرزی دیریچله از قبل مشخص است)، پس $\delta\phi|_{x=0} = 0$ می‌توان نوشت:

$$\delta F(\phi) = \int_0^L \left[-\frac{d}{dx} \left(\alpha \frac{d\phi}{dx} \right) + \beta\phi - f \right] \delta\phi \cdot dx + \left[\left(\alpha \frac{d\phi}{dx} + \gamma\phi - q \right) \delta\phi \right]_{x=L} = 0 \quad (2-17)$$

و چون این باید به ازای هر $\delta\phi$ برقرار باشد، می‌توان نتیجه گرفت که عبارات داخل کروشه صفر است. پس:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(\alpha \frac{d\phi}{dx} \right) + \beta\phi - f = 0 \\ \left[\left(\alpha \frac{d\phi}{dx} + \gamma\phi - q \right) \right]_{x=L} = 0 \end{cases} \quad (2-18)$$

که بیان گر PDE اولیه و شرط مرزی نوع کوشی است که همان‌طور که قبلا گفته شد به صورت ذاتی در فراتابع بیان شده است. در این جا نقش این نوع شرط مرزی به خوبی مشخص است.

۲-۱-۲-۲ محاسبه فراتابع با استفاده از روش باقیمانده وزن دار

در قسمت قبل از روش رایلی-ریتز و اصل وردشی برای محاسبه فراتابع استفاده کردم. همان طور که در فصل قبل دیدید، همین کار را می توان با استفاده از روش باقیمانده وزن دار نیز انجام داد و در صورتی که تابع وزن از جنس همان تابع گسترش انتخاب شود (روش گالرکین) و همچنین اپراتور L ، خودالحاق و مثبت-تعریف باشد، این دو روش منتهی به نتایج یکسانی می شود [1]، [11] و [15]. با این حال، ما همیشه نمی توانیم اصل وردشی ای برای اپراتورمان معرفی کنیم (همان طور که در این پایان نامه انجام نداده ام و تنها برای حالتی که خودالحاق و مثبت-تعریف است آن را بیان کردم و نتیجه این که فقط برای مسایلی که دارای شرایط مرزی همگن و اپراتور حقیقی است اپراتور را به طور مستقیم به دست آوردم) و این ضعفی است برای این روش. اما برخلاف روش ریتز، روش گالرکین (و اصولاً روش های مبتنی بر باقیمانده وزن دار) همیشه قابل استفاده است و محدودیتی ندارد. دقیقاً به همین دلیل است که در بیش تر منابع از این روش برای به دست آوردن فرمول بندی مساله FE شان استفاده می کنند. اما بزرگ ترین مشکل این روش کمتر بودن دیدی است که نسبت به مساله به ما می دهد. در روش وردشی، ما تعبیر ریاضی زیبایی از مساله داریم در حالی که این زیبایی در روش های مبتنی بر باقیمانده وزن دار (از جمله روش گالرکین) کمتر است. با این وجود در این جا به طور دقیق به بیان همین روش می پردازم. باقیمانده مساله دیفرانسیل مان را می نویسیم:

$$R(\phi) = L\phi - f = -\frac{d}{dx}\left(\alpha \frac{d\phi}{dx}\right) + \beta\phi - f \quad (2-19)$$

در نتیجه باقیمانده وزن دار به صورت زیر درمی آید^{۱۴}:

$$W(\phi, \psi) = \int_{\Omega} R(\phi)\psi \, d\Omega = \int_0^L \left[-\frac{d}{dx}\left(\alpha \frac{d\phi}{dx}\right) + \beta\phi - f \right] \psi \, dx = 0 \quad (2-20)$$

^{۱۴} در این جا برای سادگی، اپراتور ضرب داخلی مان حقیقی فرض شده است.

و با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء خواهیم داشت:

$$W(\phi, \psi) = \left\{ \left[\left(-\alpha \frac{d\phi}{dx} \right) \psi \right]_{x=0}^L - \int_0^L -\alpha \frac{d\phi}{dx} \frac{d\psi}{dx} .dx \right\} + \int_0^L \beta \phi \psi .dx - \int_0^L f \psi .dx = 0 \quad (2-21)$$

اگر این رابطه را مرتب کنیم خواهیم داشت:

$$W(\phi, \psi) = \int_0^L \left[\alpha \frac{d\phi}{dx} \frac{d\psi}{dx} + \beta \phi \psi \right] .dx - \int_0^L f \psi .dx + \left(-\alpha \frac{d\phi}{dx} \psi \right) \Big|_{x=0}^L = 0 \quad (2-22)$$

اگر $\psi = \phi$ باشد، آن گاه از تابع وزنی گالرکین استفاده کرده ایم و رابطه به دست آمده شباهت زیادی با رابطه منتج شده از روش ریتز خواهد داشت - ولی دقیقاً یکی نیست (تفاوت در ضریب $1/2$ و ...). باید توجه کنید که این دو رابطه از نظر ریاضی در این مرحله اصلاً به یک معنا نیستند. رابطه به دست آمده از روش ریتز، انتگرالی است که باید ایستا شود در حالی که رابطه باقیمانده وزن دار، یک تابع باقیمانده را به صورت گسترده صفر می کند و در اصل به معنای صفر کردن تصویر^{۱۵} تابع باقیمانده بر تابع وزن است. با این حال، در صورتی که شروطی که در قسمت اول ذکر کردم برقرار باشد، $\delta F(\phi)$ و $W(\phi, \phi)$ یکسان می شوند.

۲-۲-۲) خرد کردن^{۱۶} فراتابع

در قسمت قبل فراتابع را با هر دو روش ریتز و گالرکین به دست آوردم. در این بخش نتیجه قسمت قبل را به صورت تقریبی در یک المان می نویسم.

تقریب، اساس کار همه روش های عددی است. حل یک معادله در فضای بی نهایت بعدی (با درجات آزادی بی نهایت) از طریق عددی ممکن نیست. در نتیجه آن ها را باید با مساله ای در فضای پارامتری

¹⁵ Projection

¹⁶ Discretization of Functional

محدود تقریب زد. در فصل قبل درباره این و چگونگی‌اش به طور کلی توضیحاتی دادم. در این فصل برای حالتی خاص، محاسبات را به طور مرحله به مرحله انجام می‌دهیم. تنها نکته‌ای که لازم به یادآوری است، محدود بودن فضای تقریب در FEM است. یعنی توابع تقریبی ما در همه فضای مکانی تعریف نمی‌شوند، بلکه برای هر بخش فضا^{۱۷} - که به آن المان می‌گوییم - این کار را به طور جداگانه انجام می‌دهیم. در نتیجه، تقریب کل فضای مکانی به صورت تقریبی از مجموعه‌ای از زیرفضاهای مکانی می‌شود. یعنی داریم:

$$\left. \begin{aligned} \phi^e(r) &= \sum_{i=1}^{n_e} \phi_i^e N_i^e(r) \\ \phi(r) &= \sum_{e=1}^{N_e} \phi^e(r) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \phi(r) = \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{n_e} \phi_i^e N_i^e(r) = \sum_{e=1}^{N_e} \{N^e\}^T \{\phi^e\}^T = \{N\}^T \{\phi\} \quad (2-23)$$

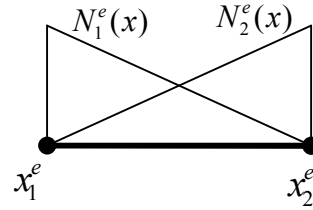
که $\phi^e(r)$ بیان‌گر مقدار تابع تقریبی در مکان r در حوزه یک المان تنهاست و $\phi(r)$ نیز تابع تقریب در کل فضای مکانی است که شامل مجموعه‌ای از توابع تقریبی المان‌هاست. n_e تعداد درجات آزادی هر المان است و N_e نیز تعداد المان‌های کل فضا است. انتخاب‌های متعددی برای نوع تابع گسترش وجود دارد. علاوه بر آن تعداد درجات آزادی هر المان نیز می‌تواند تغییر کند. در اینجا برای سادگی، در حالت ۱-بعدی، هر المان را با دو درجه آزادی مشخص می‌کنم و تابع گسترش آن را به صورت خطی در نظر می‌گیرم. بدین معنی که:

$$\phi(x) = \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^2 \phi_i^e N_i^e(x) \quad (2-24)$$

که در آن

¹⁷ به عبارت دقیق‌تر برای هر subdomain و یا element

$$N_1^e(x) = \begin{cases} \frac{x_2^e - x}{x_2^e - x_1^e} & x_1^e < x < x_2^e \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (2-25)$$



شکل ۱-۲- توابع گسترش ۱-بعدی

$$N_2^e(x) = \begin{cases} \frac{x - x_1^e}{x_2^e - x_1^e} & x_1^e < x < x_2^e \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (2-26)$$

این ساده‌ترین (و پراستفاده‌ترین) نوع المان برای مسایل ۱-بعدی است. حال با استفاده از این نوع تقریب، فراتابع مان را تقریب می‌زنیم. داریم:

$$F(\{N\}^T \{\phi\}) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\alpha \left(\frac{d \left(\sum_{e=1}^{N_e} \sum_{j=1}^2 \phi_j^e N_j^e(x) \right)}{dx} \right)^2 + \beta \left(\sum_{e=1}^{N_e} \sum_{j=1}^2 \phi_j^e N_j^e(x) \right)^2 \right] dx - \int_0^L f \left(\sum_{e=1}^{N_e} \sum_{j=1}^2 \phi_j^e N_j^e(x) \right) dx + \left[\frac{1}{2} \gamma^2 \left(\sum_{e=1}^{N_e} \sum_{j=1}^2 \phi_j^e N_j^e(x) \right)^2 - q \left(\sum_{e=1}^{N_e} \sum_{j=1}^2 \phi_j^e N_j^e(x) \right) \right]_{x=L} \quad (2-27)$$

لازم است به این توجه شود که دو جمله آخر (جملات شرایط مرزی ضروری) تنها در یک نقطه (یا دو نقطه اگر آن مرز دیگر نیز از همین جنس بود) مقدار دارند و یک ماتریس تشکیل نمی‌دهند.

گفته شد که ایده اصلی FE در تبدیل کل دامنه فضایی^{۱۸} به تعدادی زیردامنه است. در نتیجه می‌توان شرط ایستایی (برای ریتز) و صفر شدن انتگرال باقیمانده وزن‌دار (برای گالرکین و یا به طور کلی روش‌های باقیمانده وزن‌دار) را بر روی هر کدام از المان‌ها به طور مجزا نوشت. بدین معنا که برای حالت اول، سعی در

¹⁸ Spatial domain

ایستا کردن گسترش تقریبی فراتابع در هر المان کرد و برای حالت دوم، تصویر تابع تقریبی را بر تابع وزنی در هر المان به طور جداگانه صفر کرد. از آن جایی که توابع گسترش تقریب به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که هر المان مستقل از المان دیگر است، پس می‌توان نوشت:

$$\delta F(\phi) = 0 \Leftrightarrow \sum_{e=1}^{N_e} \delta F(\phi^e) = 0 \Leftrightarrow \forall \Omega_e \subset \Omega : \delta F|_{\Omega_e} = 0 \quad (2-28)$$

ارتباط گزاره اول و دوم از روی تعریف ترکیب مجموعی بودن تابع گسترش‌مان می‌آید و ارتباط گزاره‌های دوم و سوم از مستقل بودن توابع گسترش در هر المان. برای فرمول بندی باقیمانده وزن‌دار نیز به همین شکل می‌توان نوشت:

$$W(\phi) = 0 \Leftrightarrow \sum_{e=1}^{N_e} W(\phi^e) = 0 \Leftrightarrow \forall \Omega_e \subset \Omega : W|_{\Omega_e} = 0 \quad (2-29)$$

پس می‌توان نوشت:

$$F(\phi) = \sum_{e=1}^{N_e} F(\phi^e) = \sum_{e=1}^{N_e} F(\{N^e\}^T \{\phi^e\}) \quad (2-30)$$

$$F(\{N^e\}^T \{\phi^e\}) = \frac{1}{2} \int_{x_1^e}^{x_2^e} \left[\alpha \left(\frac{d \left(\sum_{j=1}^2 \phi_j^e N_j^e(x) \right)}{dx} \right)^2 + \beta \left(\sum_{j=1}^2 \phi_j^e N_j^e(x) \right)^2 \right] dx - \int_{x_1^e}^{x_2^e} f \left(\sum_{j=1}^2 \phi_j^e N_j^e(x) \right) dx^{19} \quad (2-31)$$

با نوشتن شرط ایستایی در هر المان داریم:

¹⁹ در اینجا از جمله آخر شرط مرزی صرف‌نظر شده است. آن جمله را بعداً به طور جداگانه مورد بررسی قرار خواهیم داد.

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\phi\}} \right\} = \{0\} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \phi_j} = 0 \quad (2-32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^e(\phi^e)}{\partial \phi_i^e} = & \int_{x_1^e}^{x_2^e} \left[a \left(\frac{d \left(\sum_{j=1}^2 \phi_j^e N_j^e(x) \right)}{dx} \right) \cdot \frac{\partial \left(\sum_{j=1}^2 \phi_j^e N_j^e(x) \right)}{\partial \phi_i^e} \frac{dx}{dx} + \beta \left(\sum_{j=1}^2 \phi_j^e N_j^e(x) \right) \cdot \frac{\partial \left(\sum_{j=1}^2 \phi_j^e N_j^e(x) \right)}{\partial \phi_i^e} \right] dx \\ & - \int_{x_1^e}^{x_2^e} f \frac{\partial \left(\sum_{j=1}^2 \phi_j^e N_j^e(x) \right)}{\partial \phi_i^e} dx \end{aligned} \quad (2-33)$$

که در این جا از قاعده زنجیره‌ای^{۲۰} دیفرانسیل استفاده شده است. با بیرون آوردن Σ از درون انتگرال، می‌توان فرم ساده شده آن را به شکل زیر نوشت:

$$\frac{\partial F^e(\phi^e)}{\partial \phi_i^e} = \sum_{j=1}^2 \phi_j \left\{ \int_{x_1^e}^{x_2^e} \left(\alpha \frac{dN_j^e}{dx} \frac{dN_i^e}{dx} + \beta \cdot N_j^e N_i^e \right) dx \right\} - \int_{x_1^e}^{x_2^e} f N_i^e \quad (2-34)$$

این، اکنون به فرمی است که قابل محاسبه می‌باشد. با دانستن فرم کلی N و مقادیر α ، β و f در هر المان (که تابعی از مکان هستند)، این انتگرال قابل محاسبه است. برای محاسبه می‌توان از روش‌های عددی مختلفی که برای انتگرال‌گیری وجود دارد بهره جست. اما اگر فرض ساده‌سازی انجام دهیم و مقادیر α ، β و f را در هر المان ثابت بگیریم، آن‌گاه می‌توان از خاصیت چندجمله‌ای مرتبه اول بودن تابع گسترش‌مان استفاده کنیم. این فرض به دلیل این‌که المان‌های مان کوچک هستند، فرض معقولی است. برای توابع گسترش چندجمله‌ای مرتبه اول روابط زیر را داریم:

²⁰ Chain rule

$$\int_0^l \frac{dN_j}{dx} \frac{dN_i}{dx} dx = \begin{cases} \frac{1}{l} & i = j \\ -\frac{1}{l} & i \neq j \end{cases} \quad (2-35)$$

$$\int_0^l N_i N_j dx = \begin{cases} \frac{l}{3} & i = j \\ \frac{l}{6} & i \neq j \end{cases} \quad (2-36)$$

و همان‌طور که از فصل قبل به یاد دارید، این‌ها را می‌توان به فرم ماتریسی نوشت. از آنجایی که ما در محدوده المان‌ها کار کرده‌ایم پس ماتریس‌های حاصل هم، ماتریس‌های محلی‌ای هستند که در همان المان تعریف شده‌اند. از آنجایی که در این گسترش، درجه آزادی هر المان ۲ می‌باشد، ماتریس $[K^e]$ ، 2×2 است و ماتریس‌های ستونی $[b^e]$ (که نشان از منبع و تحریک دارد) و $[\phi^e]$ (که درجات آزادی هر المان را مشخص می‌کند)، 2×1 هستند. پس داریم:

$$[K^e]_{2 \times 2} [\phi^e]_{2 \times 1} = [b^e]_{2 \times 1} \quad (2-37)$$

و با جای‌گذاری مقدار آنالیتیک انتگرال در عبارت ناشی از ایستایی فراتابع در هر المان خواهیم داشت:

$$[K^e]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha^e}{l^e} + \beta^e \frac{l^e}{3} & -\frac{\alpha^e}{l^e} + \beta^e \frac{l^e}{6} \\ -\frac{\alpha^e}{l^e} + \beta^e \frac{l^e}{6} & \frac{\alpha^e}{l^e} + \beta^e \frac{l^e}{3} \end{bmatrix} \quad (2-38)$$

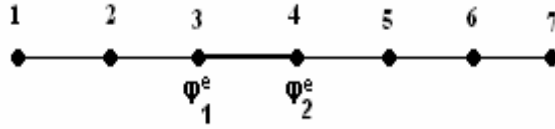
$$[b^e]_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} f^e \frac{l^e}{2} \\ f^e \frac{l^e}{2} \end{bmatrix} \quad (2-39)$$

این‌ها ماتریس‌هایی هستند که رابطه بین درجات آزادی در یک المان را مشخص می‌کنند. برای این‌که این رابطه بین همه درجات آزادی کل فضای مکانی مساله به دست بیاید، این ماتریس‌ها می‌بایست به نوعی با هم ترکیب شوند. این فرآیند را جمع‌آوری می‌گویند که در قسمت بعدی با جزییات توضیح خواهیم داد. حال همین عمل خردکردن را برای فراتابع به دست آمده از روش باقیمانده وزن‌دار نیز انجام می‌دهیم. اصول کار مشابه قسمت قبل است و حتی نتیجه در صورتی که تابع وزنی همان تابع گسترش‌مان باشد (روش گالرکین) تفاوتی نخواهد داشت.

با جای‌گذاری تابع گسترش با دو درجه آزادی‌مان در باقیمانده وزن‌دار داریم:

$$W(\{N^e\}^T \{\phi^e\}, \{\psi^e\}) = \int_{x_1^e}^{x_2^e} \left[\alpha \frac{d\left(\sum_{j=1}^2 \phi_j^e N_j^e(x)\right)}{dx} \frac{d\{\psi\}}{dx} + \beta \left(\sum_{j=1}^2 \phi_j^e N_j^e(x)\right) \{\psi^e\} \right] dx - \int_{x_1^e}^{x_2^e} f \{\psi^e\} dx + \left[\alpha \frac{d\phi}{dx} \{\psi^e\} \right]_{x=0}^L = 0 \quad (2-40)$$

در این‌جا بیان چند نکته لازم به نظر می‌رسد. یکی این‌که تعداد و نوع توابع وزن (تست) ما در حالت کلی اختیاری‌اند. همان‌طور که در فصل قبل گفته شد، اگر تعداد این توابع برابر با (یا بیش‌تر از) تعداد توابع پایه مستقل خطی‌مان باشد، در آن صورت جوابی یکتا خواهیم داشت. اگر تعداد کم‌تر باشد به جوابی یکتا نخواهیم رسید و اگر تعداد بیش‌تر باشد باید از روش‌های LSE برای حل مساله استفاده کرد. در این‌جا فرض می‌کنیم تعداد توابع وزن با توابع گسترش هر المان برابر باشد ۲- تابع گسترش و وزن. از طرف دیگر، تابع



شکل ۲-۲- شمارگذاری عمومی و محلی

پاسخ را در مرزها بسط تقریبی نداده‌ام. دلیل این کار این است که در این مورد ما مقدار دقیق این عبارت را داریم و نیازی به تقریب آن نیست. می‌توانیم انتگرال بالا را به صورت زیر بنویسیم:

$$W(\{N^e\}^T \{\phi^e\}, \psi_i) = \sum_{j=1}^2 \phi_j \left\{ \int_{x_1^e}^{x_2^e} \left[\alpha \frac{dN_j^e}{dx} \frac{d\psi_i}{dx} + \beta \cdot N_j^e \psi_i \right] dx - \int_{x_1^e}^{x_2^e} f \psi_i dx \right\} + \left[\alpha \frac{d\phi}{dx} \psi_i \right]_{x=0}^L = 0 \quad (2-41)$$

جمله آخر بیان‌گر شرایط مرزی است و جز در مرزها (که در مساله ۱-بعدی تنها ۲ نقطه است)، مقدار ندارد. نتیجه این که در اکثر المان‌ها این جمله وارد نمی‌شود. پس با صرف‌نظر از آن، می‌توانیم درست مثل قبل بنویسیم^{۲۱}:

$$[K^e]_{2 \times 2} [\phi]_{2 \times 1} = [b^e]_{2 \times 1} \quad (2-42)$$

$$K_{j,i}^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} \left[\alpha \frac{dN_j^e}{dx} \frac{d\psi_i}{dx} + \beta \cdot N_j^e \psi_i \right] dx \quad (2-43)$$

$$b_j^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} f \psi_i dx \quad (2-44)$$

و اگر در آن، $\psi_i = N_i$ باشد، فرمول بندوی گالرکین به دست می‌آید که درست همان فرمول‌بندی ریتز است. مرزها را به طور جداگانه در آینده بررسی خواهیم کرد.

²¹ البته در قسمت‌های بعدی جمله‌های مرزی را به طور دقیق بررسی خواهیم کرد.

۲-۳-۳) جمع‌آوری معادلات المان‌ها

در قسمت قبل رابطه‌ای را که درجات آزادی^{۲۲} یک المان را به هم مربوط می‌کند به دست آوردم. دیدید که با محسبات بسیار ساده‌ای می‌توان آن مقادیر را محاسبه کرد. اما برای رسیدن به پاسخ نهایی و درجات آزادی کل سیستم، می‌بایست همه این معادلات را به هم در نظر گرفت.

این معادلات می‌توانند با هم اشتراک داشته باشند: به این معنا که یک درجه آزادی در معادله‌ی توصیف‌گر چندین المان مختلف شرکت داشته باشد. چنین امری وقتی رخ می‌دهد که چندین المان گره‌ی مشترکی داشته باشند^{۲۳}.

در حالت ۱-بعدی، هر المان با ۲ المان دیگر ارتباط دارد مگر در المان‌های دارای گره مرزی که درجه آزادی روی مرز، تنها با همان المان ارتباط دارد. در نتیجه جز گره‌های روی مرز، بقیه گره‌ها توسط معادلات دو المان توأم توصیف می‌شوند. این موضوع در شکل دیده می‌شود.

در حالت ۲-بعدی، تعداد گره‌هایی مشترک بستگی به مش‌بندی مان دارد و گزاره‌ای کلی نمی‌توان بیان کرد. با این‌همه این تعداد محدود است (در مرتبه‌ای کم‌تر از ۱۰) چون تنها المان‌های مجاور دارای گره مشترک هستند. در نتیجه هیچ ارتباط مستقیمی بین دو درجه آزادی در دو سوی فضای مکانی شکل وجود ندارد (برخلاف روشی چون MoM). نتیجه این‌که تنها گره‌های نزدیک به هم از طریق المان‌های‌شان با هم ارتباط پیدا می‌کنند و اکثر گره‌ها ارتباطی با هم نخواهند داشت. این یکی از ویژگی‌هایی‌ست که باعث محبوبیت FEM شده است چون حاصل‌اش ماتریس‌هایی تنک است که از نظر محاسباتی مزیت بزرگی‌اند [15].

در قسمت‌های قبلی تابع تقریب را به مجموعه‌ای از توابع تقریب محلی تبدیل کردم. یعنی نوشتم:

²² لازم است تاکید کنم که منظور از درجات آزادی، متغیرهای مجهول مساله هستند که کمیت مورد نظر را توصیف می‌کنند – هر درجه آزادی معادل یک مقدار میدان، پتانسیل و ... در یک نقطه از فضای مکانی مساله است.

²³ ارتباط درجات آزادی (مجهولات) و المان می‌تواند به شکل‌های مختلفی باشد. در این نوشتار تا به حال، درجات آزادی در گره‌ها تعریف شده است. ممکن است درجات آزادی به صورت‌های دیگری نیز مثلاً در وجوه تعریف شود که فعلاً کاری به آن نداریم.

$$\phi(r) = \sum_{e=1}^{N_e} \phi^e(r) \quad (2-45)$$

و از آن جایی که این توابع در هر ناحیه مستقل بودند، قادر به نوشتن عبارات زیر شدم:

$$\delta F(\phi) = 0 \Leftrightarrow \sum_{e=1}^{N_e} \delta F(\phi^e) = 0 \quad (2-46)$$

$$W(\phi) = 0 \Leftrightarrow \sum_{e=1}^{N_e} W(\phi^e) = 0 \quad (2-47)$$

پس از آن، این تجزیه را بر روی فراتابع انجام دادم و نتیجه این شد که برای گره‌های یک المان، رابطه‌ای به دست آوردم (روابطی که توسط ماتریس‌های $[K^e]_{2 \times 2}$ و $[b^e]_{2 \times 1}$ برای حالت ۱-بعدی مشخص شدند) که شرط ایستایی (یا صفر شدن باقیمانده وزنی) در آنها ارضا می‌شد. در این فرمول‌بندی، هر گره در المان دارای شماره‌گذاری محلی‌ای^{۲۴} بود - ۱ و ۲ برای حالت ۱-بعدی. اما در واقع با توجه به موقعیت گره در مش‌بندی، شماره‌ی کلی‌ی آن فرق می‌کند و از آن جایی که روابط اولیه ما در کل فضا مکانی تعریف شده بودند، می‌بایست در ایجاد روابط کلی - که به فرم ماتریسی بیان می‌شوند - شماره عمومی^{۲۵} آن را در نظر گرفت. به عنوان مثال، در این شکل، شماره گره‌های محلی ۱ و ۲ مشخص شده به ترتیب برابر با شماره عمومی ۳ و ۴ است. پس اگر رابطه ماتریسی محلی آن‌ها به شکل زیر باشد:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e \\ K_{12}^e & K_{22}^e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1^e \\ \phi_2^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^e \\ b_2^e \end{bmatrix} \quad (2-48)$$

می‌توان نوشت:

²⁴ Local numbering
²⁵ Global numbering

$$\begin{bmatrix} \phi_1^e \\ \phi_2^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{map(e,1)} \\ \phi_{map(e,2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e \\ K_{12}^e & K_{22}^e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_{map(e,1)} \\ \phi_{map(e,2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^e \\ b_2^e \end{bmatrix} \quad (2-49)$$

در این جا تابع $map(e,i)$ ، گره محلی نام المان e را به معادلش در شماره گذاری عمومی گره ها تبدیل می کند. این تابع -که می توان آن را به وسیله یک آرایه نشان داد- می بایست در هنگام تولید مش ایجاد شود و برای مراحل بعدی نگهداری شود. با این تبدیل می توان معادل عمومی همه رابطه های محلی ای را که از ایستا کردن فراتابع و یا صفر کردن باقیمانده وزن دار تولید شده است با هم ترکیب کرد. یعنی می توان نوشت:

$$\sum_{e=1}^{N_e} \{ [K^e][\phi^e] = [b^e] \} \Leftrightarrow \sum_{e=1}^{N_e} \{ [K^e] \cdot map([\phi^e]) = [b^e] \} \Leftrightarrow [K][\phi] = [b] \quad (2-50)$$

حال برای مشخص تر شدن چگونگی این کار، شبه برنامه ای^{۲۶} از روند کار FEM و چگونگی جمع آوری المان ها می نویسم:

```
define Ne    as number of elements
define N     as number of nodes

define Elements as struct
{
    int node1;
    int node2;
} with Ne elements;

define [K] as N*N matrix
define [b] as N*1 matrix
Initialize; // Zeroing [K] and [b] elements
```

²⁶ Pseudo-code


```

// Main loop

for e=1 to Ne
{
  compute [Ke]; // 2*2 matrix
  compute [be]; // 2*1 matrix

  for i=1 to 2
    for j=1 to 2
       $K(\text{map}(e,i),\text{map}(e,j)) += Ke(i,j);$ 

  for i=1 to 2
     $b(\text{map}(e,i)) += be(i);$ 
  }

int map(e,i)
{
  if (i==1)
    return Elements[e].node1;
  if (i==2)
    return Elements[e].node2;
}

```

۴-۲-۲ اعمال شرایط مرزی

هر مساله PDE دارای شرایط مرزی^{۲۷} است. بدون دانستن شرایط مرزی، مساله دارای پاسخ یکتا نخواهد بود. لذا برای حل هر چنین مساله‌ای، ما باید شرایط مرزی آن را نیز به گونه‌ای در نظر بگیریم.

²⁷ Boundary Condition

در مسایلی که در این جا مطرح کردم^{۲۸}، دو نوع شرط مرزی کلی وجود دارد [۱۱]:

$$\phi|_{x \in \Gamma_d} = p \quad (2-51) \quad ۱. \text{ شرط مرزی دیریچله ناهمگن:}$$

$$\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x} + \gamma \phi \Big|_{x \in \Gamma_n} = q \quad (2-52) \quad ۲. \text{ شرط مرزی کوشی (یا نوع سوم):}$$

که $\Gamma (= \Gamma_d \cup \Gamma_n)$ مرز مساله است و در حالت ۱-بعدی، دو نقطه ابتدا و انتها را شامل می شود (ولی در حالت ۲-بعدی یک منحنی است و در حالت ۳-بعدی، یک رویه^{۲۹} است). اگر q و γ هر دو 0 باشند، شرط مرزی کوشی تبدیل به شرط مرزی بسیار متداول (در الکترومغناطیس) نیومان می شود. البته این شرط، خود، معادل شرط مرزی امپدانس^{۳۰} است که برای ایجاد شرط مرزی جاذب^{۳۱} مناسب در scattering به کار می رود. در قسمت های قبل دیدیم که در FEM و هنگام به دست آوردن فراتابع با دو نوع شرط مرزی مواجه می شویم:

۱. شرط مرزی ذاتی

۲. شرط مرزی ضروری

اولین شرط به طور خودبه خودی در فرمول بندی FE لحاظ می شود - یعنی کافی ست هنگام خرد کردن و ساخت ماتریس های محلی آن را در نظر بگیریم. اما شرط نوع دوم، هیچ گونه تاثیری در فراتابع ندارد و لذا می بایست به طور جداگانه برقرار شود. نتیجه این است که حل یک PDE با B.C. معادل ایستا کردن فراتابع در روش ریتز (یا صفر کردن باقیمانده ی وزن دار برای روش گالرکین و هر روش مشابه) و همچنین برقراری جداگانه شرط مرزی ضروری است.

²⁸ مساله PDE خطی و مرتبه ۲ - مساله Sturm-Liouville

²⁹ surface

³⁰ Impedance Boundary Condition

³¹ Absorbing Boundary Condition (A.B.C.)

در قبل دیدید که شرط مرزی نوع کوشی، شرط مرزی ذاتی است ولی شرط مرزی دیرچله، شرط ضروری است و باید به طور جداگانه لحاظ شود. چگونگی اعمال این شروط مرزی را در این بخش توضیح می‌دهم. ابتدا از شرط مرزی ذاتی - یعنی شرط مرزی کوشی و نیومان به عنوان حالت خاص‌اش - شروع می‌کنم (برای هر دو حالت ریتز و گالرکین) و سپس به شرط مرزی دیرچله - که شرط مرزی ضروری در FE است - می‌پردازم.

ابتدا فرض کنید که شرط مرزی نیومان در مرز Γ_n برقرار باشد. یعنی داشته باشیم:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (2-53)$$

که n بردار عمود بر سطح مرز است و در حالت یک بعدی همان x می‌باشد. می‌بینید که این معادل صفر بودن q و γ در شرط مرزی کوشی است. با مشاهده فراتابع به دست آمده از اصل وردشی، می‌بینیم که جمله مربوط به این نوع شرط مرزی صفر می‌شود:

$$F(\phi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\alpha \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \beta \phi^2 \right] dx - \int_{\Omega} f\phi \cdot dx + \left[\frac{1}{2} \gamma \phi^2 - q\phi \right] \Big|_{x=L} \quad (2-54)$$

و در نتیجه برای اعمال این شرط مرزی، لازم نیست هیچ‌کاری بکنیم! حال فرض کنید حالت کلی شرط مرزی کوشی را در المان‌های ۱-بعدی برقرار باشد. می‌نویسیم:

$$F(\{N\}^T \{\phi\}) = [\dots] + \left[\frac{1}{2} \gamma \left(\sum_{e=1}^N \sum_{j=1}^2 \phi_j^e N_j^e(x) \right)^2 - q \left(\sum_{e=1}^N \sum_{j=1}^2 \phi_j^e N_j^e(x) \right) \right] \Big|_{x=L} \quad (2-55)$$

از آن جایی که این شرط تنها در یک نقطه (مثلا $x=L$ در این جا - گرچه ممکن است در دیگر مرز برقرار باشد) صادق است، پس تنها در المان مرزی است که این جمله مقدار دارد. پس:

$$F(\{N\}^T \{\phi\}) = [\dots] + \left[\frac{1}{2} \gamma \left(\sum_{j=1}^2 \phi_j^N N_j^N(x) \right)^2 - q \left(\sum_{j=1}^2 \phi_j^N N_j^N(x) \right) \right] \Big|_{x=L} \quad (2-56)$$

که N اندیس المان انتهایی است. شرط ایستایی می بایست برقرار باشد، پس می نویسیم:

$$\delta F(\{N\}^T \{\phi\}) = \delta [\dots] + \delta \left[\frac{1}{2} \gamma \left(\sum_{j=1}^2 \phi_j^N N_j^N(x) \right)^2 - q \left(\sum_{j=1}^2 \phi_j^N N_j^N(x) \right) \right] \Big|_{x=L} = 0 \quad (2-57)$$

جمله اول همان جمله ایست که در قسمت های قبل به دست آوردیم و $[K^e]$ و $[b^e]$ را برای مان تولید می کرد. تفاوت تنها در جمله دوم است که به ماتریس های قبلی اضافه می شود. برای برقراری شرط ایستایی - همان طور که دیدید - می توان نوشت:

$$\frac{\partial F}{\partial \phi_j} = 0 \quad (2-58)$$

و نتیجه برای همه المان ها درست همان نتیجه ی بخش قبلی است مگر المان انتهایی که $e = N_e$ می شود و در آن داریم:

$$\frac{\partial F}{\partial \phi_N} = [K^e][\phi] - [b^e] + \left[\gamma \sum_{j=1}^2 \phi_j^{N_e} N_j^{N_e}(x) \cdot N_2^{N_e}(x) - q \cdot N_2^{N_e}(x) \right] \Big|_{x=L} = 0 \quad (2-59)$$

توجه کنید که در این جا فرض کرده ام که گره انتهایی در شماره گذاری محلی، گره شماره ۲ است. در دیگر صورت هم تفاوت چندانی در فرمول بندی - جز تغییر یک اندیس - وجود ندارد. اینک از خاصیت زیر المان مرتبه یک مان استفاده می کنیم:

$$N_i^e(x_j^e) = \delta_{ij} \quad (2-60)$$

یعنی مقدار تابع گسترش یک گره در خود گره ۱ است و در گره روبرو، ۰. در نتیجه قادریم بنویسیم:

$$\frac{\partial F}{\partial \phi_N} = [K^e][\phi] - [b^e] + [\gamma \phi_2^{N_e} - q] = 0 \quad (2-61)$$

و با اعمال این تغییرات در درجه آزادی انتهایی در ماتریس نهایی، فرم زیر به دست می آید:

$$\begin{cases} K'_{N,N} = K_{N,N} + \gamma \\ b'_N = b_N + q \end{cases} \quad (2-62)$$

برای حالت ۲- بعدی نیز با انجام روندی مشابه، چنین نوع روابطی به دست می آید. یعنی برای حالت نیومان هیچ تغییری در فرم اولیه ماتریس ها صورت نمی گیرد و در حالت کلی کوشی جملاتی به ماتریس ها اضافه خواهد شد.

پس از بیان چگونگی اعمال شرایط مرزی کوشی برای فرمول بندی ریتز، به چگونگی این کار در فرمول بندی گالرکین می رسیم. پیش از ادامه تنها به ذکر این بسنده می کنم که نتایج حاصل مشابه حالت قبل اند - گرچه به دلیل تفاوت فرمول بندی، شکل محاسبه شان کمی تفاوت دارد. فرم کلی فرمول بندی باقیمانده وزن دار به شکل زیر است:

$$W(\phi, \psi) = \int_0^L \left[\alpha \frac{d\phi}{dx} \frac{d\psi}{dx} + \beta \phi \psi \right] dx - \int_0^L f \psi dx + \left(-\alpha \frac{d\phi}{dx} \psi \right) \Big|_{x=0}^L = 0 \quad (2-63)$$

ابتدا شرایط مرزی را نیومان گیریم. در رابطه بالا به سادگی دیده می شود که جمله آخر - جمله مربوط به شرایط مرزی ضروری - صفر می شود. پس در این حالت نیز لازم نیست تغییری اعمال کنیم. سپس به حالت کلی شرط مرزی کوشی می رسیم. داریم:

$$\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x \in \Gamma_n} = [q - \gamma \phi] \Big|_{x \in \Gamma_n} \quad (2-64)$$

پس با جای گذاری می توانیم بنویسیم:

$$W(\phi, \psi) = [\dots] + [(\gamma \phi - q) \psi]_{x \in \Gamma_n} + \left[-\alpha \frac{d\phi}{dx} \psi \right]_{x \in \Gamma_d} \quad (2-65)$$

ذکر چند نکته لازم به نظر می رسد. اول این که با این که فرمول بندی برای حالت ۱- بعدی بود ولی برای شباهت بیشتر با بخش های ۲- بعدی و ۳- بعدی آینده، به جای نشان دادن مرز با تنها یک نقطه، از مجموعه ای کلی تر (یعنی Γ) استفاده کرده ام. در نتیجه باید دقت کرد که Γ دو نقطه است و هر کدام از Γ_n (مرز ذاتی) و Γ_d (مرز ضروری) بین ۰ تا ۲ نقطه اند (وجود نداشتن چنین شرط مرزی ای تا پوشش کلی مرز توسط این نوع شرط مرزی). نکته دیگر این که برخلاف فرمول بندی به دست آمده از اصل وردشی، در این جا ذاتی و ضروری بودن مرز به طور مستقیم مشخص نمی شود بلکه خودمان آن را به دو بخش تقسیم کرده ایم. در مرز ذاتی رابطه شرایط مرزی را نوشته ایم ولی به بخش دیگر دست نزده ایم. حال به بررسی چگونگی اعمال شرط مرزی ضروری (که از نوع دیرپچله است) می پردازم. قبلا گفتم که این شرط باید به طور جداگانه اعمال شود و در فراتابع تاثیر ندارد.

اعمال این شرط معادل این است که مقدار تعدادی از درجات آزادی برابر با مقداری از قبل مشخص شده باشند^{۳۲}. یعنی مقادیر گره‌ها^{۳۳} بر روی مرزی که توسط Γ_d مشخص شده است به شکل زیر مشخص باشد:

$$\begin{aligned} \phi|_{x \in \Gamma_{d_1}} = p_1, \phi|_{x \in \Gamma_{d_2}} = p_2, \dots, \phi|_{x \in \Gamma_{d_n}} = p_n \\ \bigcup_{i=1}^n \Gamma_{d_i} = \Gamma_d \end{aligned} \quad (2-66)$$

با چندین منظر می‌توان چگونگی اعمال این شرط مرزی را بررسی کرد که همه‌گی شبیه به هم هستند (به راحتی می‌توان نشان داد که بعضی از نظر ریاضی معادل‌اند و البته بعضی نیز متفاوت ولی مشابه). ابتدا فرض کنید درجات آزادی را به دو دسته آزاد^{۳۴} و از پیش معلوم^{۳۵} تقسیم کرده باشیم و آن‌ها را به ترتیب با ϕ_p و ϕ_f مشخص کنیم. دسته اول بیان‌گر درجات آزادی‌ای هستند که باید به دست بیایند و دومی مشخص‌کننده مقادیر از قبل مشخص شرایط مرزی دیرپچله هستند. اگر در طی عملیات شماره‌گذاری گره‌ها (و یا توسط پس‌پردازشی بعد از آن) ماتریس ستونی درجات آزادی را به دو قسمت مجزا آزاد و از پیش معلوم تقسیم کنیم می‌توانیم بنویسیم:

$$[K] \cdot [\phi] = [b] \Rightarrow \begin{bmatrix} \{K_{ff}\} & \{K_{fp}\} \\ \{K_{pf}\} & \{K_{pp}\} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \{\phi_f\} \\ \{\phi_p\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{b_f\} \\ \{b_p\} \end{bmatrix} \quad (2-67)$$

و از آن جایی که هدف ما به دست آوردن ϕ_f است، می‌نویسیم:

$$\{K_{ff}\} \cdot \{\phi_f\} + \{K_{fp}\} \cdot \{\phi_p\} = \{b_f\} \quad (2-68)$$

³² در نتیجه شاید اطلاق لفظ **درجه آزادی** چندان درست ننماید اما برای یکسانی نام‌گذاری فضای پارامتری در کل این پایان‌نامه، از همین لفظ استفاده کرده‌ام.

³³ البته در اینجا فرض بر این بوده است که المان‌های مان و در نتیجه توابع گسترش تقریب‌مان از نوع node-based باشد. اگر المان مان edge element باشد، چنین حرفی دقیق نخواهد بود.

³⁴ Free

³⁵ Prescribed

که همان‌طور که قبلاً گفتیم، مقادیر ماتریس $\{\phi_p\}$ مشخص است. با جداکردن بخش مجهول از معلوم داریم:

$$\{K_{ff}\} \cdot \{\phi_f\} + \{K_{fp}\} \cdot \{\phi_p\} = \{b_f\} - \{K_{fp}\} \cdot \{\phi_p\} = \{b'_f\} \quad (2-69)$$

پس اکنون، مساله‌مان تبدیل به حل چنین ماتریسی – که کوچک‌تر از ماتریس قبل است – شده است. به این عمل condensation of boundary condition می‌گویند. حالت بسیار متداول شرط مرزی دیریچله، حالت همگن آن است. در آن حالت به دلیل صفر بودن ماتریس $[\phi_p]$ ، معادله به شکل زیر درمی‌آید:

$$\{K_{ff}\} \cdot \{\phi_f\} = \{b_f\} \quad (2-70)$$

دو نکته در این‌جا قابل توجه است.

اول آن‌که با دقت در جملات تشکیل دهنده b'_f که نقش تحریک را دارند دیده می‌شود که شامل دو بخش است [15]:

۱. جمله ناشی از منبع مستقل $\{b_f\}$ که همان‌طور که دیدیم از تاثیر f به وجود می‌آید.

۲. جمله ناشی از کنش شرایط مرزی دیریچله بر نقاط مجهول.

دوم آن‌که condensation of B.C باعث کوچک‌تر شدن مساله و در نتیجه سریع‌تر حل شدن، دقیق‌تر بودن پاسخ‌ها و اشغال حافظه کم‌تری توسط حل‌کننده ماتریسی^{۳۶} می‌شود. این مساله در حالت ۱-بعدی نمودی ندارد زیرا حداکثر تعداد نقاط مرزی ممکن ۲ می‌باشد ولی در حالت‌های ۲-بعدی و ۳-بعدی، چون تعداد نقاط مرزی می‌تواند بسیار زیاد (و حتی بیش‌تر از تعداد نقاط درونی) باشد تاثیر انجام این‌کار بسیار

³⁶ Matrix Solver

چشم‌گیر است. با این حال پیاده‌سازی چنین چیزی پیچیدگی برنامه تولیدکننده ماتریس‌های لازم را بیش‌تر می‌کند.

دیدگاه دیگر بررسی اعمال شرایط مرزی دیریچله به صورت زیر است [۱۱]:

فرض کنید می‌خواهیم مقدار یک درجه آزادی، مقدار مشخصی باشد. یعنی:

$$\phi_m = p \quad (2-71)$$

ماتریس‌های $[K]$ و $[b]$ را گسترش می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & & & & K_{2n} \\ \cdot & & & & & \\ K_{m1} & K_{m2} & & & & K_{mn} \\ \cdot & & & & & \\ K_{n1} & & & & & K_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \dots \\ \phi_m \\ \dots \\ \phi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (2-72)$$

خواسته‌مان - یعنی $\phi_m = p$ - را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$\phi_m = p \Rightarrow 0\phi_1 + 0\phi_2 + \dots + 1\phi_m + \dots + 0\phi_n = p \quad (2-73)$$

پس می‌شود نوشت:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & & & & K_{2n} \\ \cdot & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & & & & & \\ K_{n1} & & & & & K_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \dots \\ \phi_m \\ \dots \\ \phi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ p \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (2-74)$$

در این جا تقارن^{۳۷} مساله به هم می خورد. این، مطلوب نیست زیرا تقارن باعث می شود حل کننده مساله را سریع تر و با نیاز به حافظه کمتری حل کند. پس با انجام تغییر زیر، ماتریس را متقارن می کنیم:

$$\begin{aligned} b'_i &\leftarrow b_i - K_{im}P_m \\ K_{im} &= 0 \\ (i &= 1, \dots, N \text{ \& } i \neq m) \end{aligned} \quad (2-75)$$

ماتریس به شکل متقارن زیر درمی آید:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1(m-1)} & 0 & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & \dots & K_{2(m-1)} & 0 & \dots & K_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ K_{n1} & & & & & K_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \dots \\ \phi_m \\ \dots \\ \phi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 - K_{1m}P_m \\ b_2 - K_{2m}P_m \\ \dots \\ p \\ \dots \\ b_n - K_{nm}P_m \end{bmatrix} \quad (2-76)$$

کاری که در اصل انجام داده ام، انتقال عناصری از K که با ϕ_m ارتباط داشته اند به سمت راست است. حال می توان سطری را که تنها متاثر از ϕ_m است حذف کرد و این باعث کاهش اندازه ماتریس می شود. نتیجه حاصل دقیقاً معادل روش پیشین (تقسیم به دو دسته آزاد و از پیش معین) است.

راه دیگری که بسیار مورد استفاده قرار می گیرد -و روش اصلی اعمال شرایط مرزی در مسایل مقادیر ویژه است- روش عنصر قطری غالب^{۳۸} نام دارد.

فرض کنید مانند قبل می خواهیم ϕ_m ، مقدار معین p را داشته باشد. اگر بنویسیم:

$$\begin{aligned} K_{m1} \cdot \phi_1 + K_{m2} \cdot \phi_2 + \dots + \alpha \cdot \phi_m + \dots + K_{mn} \cdot \phi_n &= \alpha \cdot p \\ \Rightarrow \phi_m &= \frac{\alpha \cdot p - K_{m1} \cdot \phi_1 - K_{m2} \cdot \phi_2 - \dots}{\alpha} \stackrel{\alpha \gg 1}{\Rightarrow} \phi_m \approx p \end{aligned} \quad (2-77)$$

³⁷ Symmetry

³⁸ Dominate Diagonal Coefficient

و نتیجه مطلوب حاصل می‌شود. ویژگی خوب این روش، سادگی پیاده‌سازی آن است اما از طرفی این ایراد را دارد که خطای محاسبه را به دلیل بالا بردن condition number ماتریس حاصل افزایش می‌دهد. قبل از تعریف condition number، لازم است تاثیر چنین کاری را در مسایل مقادیر ویژه - که بحث خاص این پایان‌نامه است - ببینیم. یک مساله مقدار ویژه را که به صورت زیر است سطر به سطر گسترش می‌دهیم:

$$[K][\phi] = \lambda[B][\phi] \quad (2-78)$$

سطر m به صورت زیر است:

$$K_{m1} \cdot \phi_1 + K_{m2} \cdot \phi_2 + \dots + \alpha \cdot \phi_m + \dots + K_{mn} \cdot \phi_n = \lambda[B_{m1} \cdot \phi_1 + \dots + B_{mm} \cdot \phi_m + \dots + B_{mn} \cdot \phi_n] \quad (2-79)$$

که می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \phi_m + \delta_1 &= \lambda[B_{mm} \cdot \phi_m + \delta_2] \\ \delta_1 &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^n A_{mi} \cdot \phi_i \\ \delta_2 &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^n B_{mi} \cdot \phi_i \end{aligned} \quad (2-80)$$

بدون وارد شدن در جزئیات، ابتدا فرض می‌کنیم که $\phi_m \approx 0$ به طوری که $\alpha \phi_m \ll 1$. پس خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} B_{mm} \ll 1 &\Rightarrow B_{mm} \cdot \phi_m \approx 0 \\ \Rightarrow \delta_1 &= \lambda \delta_2 \end{aligned} \quad (2-81)$$

و همچنین برای بقیه معادلات (سطرها) نیز می‌توان نوشت:

$$\sum_{i=1}^N A_{ki} \phi_k \approx \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^N A_{ki} \phi_k$$

$$\sum_{i=1}^N B_{ki} \phi_k \approx \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^N B_{ki} \phi_k$$
(2-82)

که حاصل تقریبی است از دستگاه معادله‌ای که جمله ϕ_m در آن حذف شده باشد و این معادل اعمال شرط مرزی دیرپچله همگن -درست مانند قسمت‌های قبل- است. این نوع شرط مرزی ایست که در مسایل مقادیر ویژه به کار می‌رود. حالت دیگر این است که ϕ_m به حد قابل ملاحظه‌ای بزرگ باشد و رابطه $\alpha \phi_m \gg 1$ برقرار باشد. در نتیجه می‌نویسم:

$$\alpha \phi_m + \delta_1 = \lambda [B_{mm} \cdot \phi_m + \delta_2] \xRightarrow{B_{mm} \phi_m \ll \delta_2} \alpha + \frac{\delta_1}{\phi_m} \approx \lambda \frac{\delta_2}{\phi_m}$$
(2-83)

مقادیر $\frac{\delta_2}{\phi_m}$ و $\frac{\delta_1}{\phi_m}$ در صورتی که α بسیار بزرگ انتخاب شده باشد، بسیار کوچک‌تر از آن‌اند. پس می‌توان نوشت:

$$\lambda \approx \frac{\alpha}{\frac{\delta_2}{\phi_m}} = O(\alpha)$$
(2-84)

یعنی اندازه λ در حد و اندازه‌های α است. البته در این‌جا تقریب‌ها چندان دقیق نبودند و ممکن است تفاوت حتی در اندازه یک مرتبه بزرگی هم وجود داشته باشد. اما به هر حال می‌توان گفت که هر چقدر α بزرگ‌تر باشد، اندازه بزرگ‌ترین مقدار ویژه نیز در همان حدود بزرگ‌تر می‌شود. پس می‌توان با تقریب زیاد نوشت:

$$O\left(\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}\right) = O(\alpha) \quad (2-85)$$

پس در حل مسایل مقادیر ویژه، به ازای هر برقراری شرط مرزی دیرچله، یک مقدار ویژه بسیار بزرگ و بدون تعبیر فیزیکی حاصل می‌شود. حذف این‌ها کار ساده‌ایست (چون چندین مرتبه بزرگ‌تر از مقادیر ویژه مساله هستند) ولی همان‌طور که خواهید دید باعث کم شدن دقت پاسخ می‌شود. برای بررسی این موضوع باید به مطالعه condition number پرداخت. در تعریف condition number از نرم طبیعی^{۳۹} یا نرم بی‌نهایت^{۴۰} یک ماتریس استفاده می‌شود که به شکل زیر تعریف شده‌است [15]:

$$\|\mathbf{A}\| = \|\mathbf{A}\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq N} \left(\sum_{j=1}^N |A_{ij}| \right) \quad (2-86)$$

و خود condition number به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\text{Cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\| \geq \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|} \quad (2-87)$$

که $\lambda_{\min}$ و $\lambda_{\max}$ به ترتیب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین مقدار ویژه ماتریس هستند. ارتباط $\text{Cond}(\mathbf{A})$ و خطای تقریب به شکل زیر بیان می‌شود. اگر خطای نسبی K و تقریب‌اش^{۴۱} را - که با $\tilde{K}$ نشان می‌دهم - به شکل زیر باشد:

$$\frac{\|K - \tilde{K}\|}{\|K\|} = 10^{-t} \quad (2-88)$$

³⁹ Natural norm

⁴⁰ Infinite norm

⁴¹ در اینجا منظور از تقریب، تقریب خردکردن نیست، بلکه تقریب ناشی از محدود بودن تعداد رقم‌های ذخیره‌سازی در کامپیوتر است.

و خطای محاسبه پاسخ ϕ که به دلیل تقریب ذخیره‌سازی، به صورت $\tilde{\phi}$ حاصل شده است به صورت زیر باشد:

$$\frac{\|\phi - \tilde{\phi}\|}{\|\phi\|} = 10^{-s} \quad (2-89)$$

و

$$c = \text{cond}(K) \quad (2-100)$$

آن‌گاه

$$s \geq t - \log_{10}(c) \quad (2-101)$$

و هر چقدر condition number بزرگ‌تر باشد، s کوچک‌تر از t می‌شود و دقت جواب پایین‌تر می‌آید [15]. در قسمت قبل نشان دادم که هر چقدر مقدار α در روش عنصر قطبی غالب بیش‌تر باشد، ماکسیمم مقدار ویژه بزرگ‌تر می‌شود و در نتیجه $\text{cond}(K)$ به همان نسبت بزرگ‌تر می‌گردد. مثلاً خطای رقم اعشاری 10^{-11} در K وقتی نسبت بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین مقدار ویژه 10^4 باشد (تقریب دست پایین از مقادیر متداول در روش عنصر قطبی غالب) باعث ایجاد خطا در رقم اعشار 10^{-6} پاسخ مساله می‌شود.

۳-۲) روش اجزا محدود ۲-بعدی

در قسمت قبل به طور مفصل درباره چگونگی به‌کارگیری FEM در حالت ۱-بعدی توضیح دادم. در این بخش به حالت ۲-بعدی آن خواهیم پرداخت. اما از آن‌جایی که هدف این فصل آشنایی کلی با FEM بوده

است، در نتیجه کمتر از قبل وارد جزییات این حالت می‌شوم چون بسیار مشابه با مورد قبلی است و تکرار دقیق‌اش لزوم چندانی ندارد. مخصوصاً این‌که برای حالت ۲-بعدی پایان‌نامه‌ای به طور جداگانه نوشته شده است [17] [17]. می‌توان یک مساله PDE ۲-بعدی معمول در الکترومغناطیس را در حالت کلی به شکل زیر نوشت [۱۵]:

$$\begin{aligned}
 & -\nabla_t \cdot (\alpha(x, y) \nabla_t \phi(x, y)) + \beta(x, y) \phi(x, y) = f(x, y) \\
 & \nabla_t = \frac{\partial}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \hat{a}_y \\
 & \Omega \subset \mathbb{R}^2 \quad (2-102) \\
 & \phi|_{\Gamma_d} = P \quad (\text{Dirichlet Boundary Condition}) \\
 & (\alpha(x, y) \nabla \phi) \cdot \hat{n} + \gamma \phi|_{\Gamma_n} = q \quad (\text{Cauchy Boundary Condition}) \\
 & \Gamma_n + \Gamma_d = \Gamma \quad (\text{Boundary of Domain})
 \end{aligned}$$

که مانند قبل با انتخاب پارامترهای مناسب می‌توان مسایل الکترومغناطیسی متنوعی را بیان کرد. به عنوان مثال یک مساله الکترواستاتیکی به صورت زیر است:

$$\begin{cases}
 -\frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon_r \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon_r \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
 \phi = P \quad (\text{On Conductors}) \\
 \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (\text{On Plane of Symmetry})
 \end{cases} \quad (2-103)$$

که همان‌طور که دیده می‌شود ϕ بیان‌گر پتانسیل اسکالر الکتریکی است و P نیز مشخص‌کننده پتانسیل بر سطح فلز می‌باشد.

مساله‌ای که در اینجا برای ما بیش‌تر اهمیت دارد، حل مساله‌ی مقادیرویزه موج‌بر است. موج‌بر شباهت بسیار زیادی به محفظه رزونانس دارد. اگر موج‌بر ایده‌آل فرض شود و مقطع عرضی‌اش در طول محور طولی

ثابت باشد، آن گاه تبدیل به مساله‌ای ۲-بعدی می‌شود. در اصل این یکی از پراستفاده‌ترین کاربردهای FEM ۲-بعدی در الکترومغناطیس است.

فرض کنید در یک مساله موج‌بری، تنها یک نوع مد ($TE(H_z)$ و یا $TM(E_z)$) منتشر می‌شود. به سادگی می‌توان نشان داد که با دانستن مولفه طولی می‌توان مولفه‌های عرضی را نیز به دست آورد [۱۱]. طبیعی می‌نماید که آن مولفه را به عنوان پارامتر مجهول مساله در FEM در نظر بگیریم. اما با این وجود در حالت کلی مدهای منتشرشونده در یک موج‌بر شامل ترکیبی از مدهای $TE(H_z)$ و $TM(E_z)$ می‌باشد^{۴۲}. در نتیجه برای فرمول‌بندی آن می‌بایست به گونه‌ای این موضوع را در نظر بگیریم. برای چنین کاری چند روش کلی زیر مطرح می‌شود:

۱. فرمول‌بندی $E_z - H_z$ [۱۱]

۲. تحلیل تمام-موج با مولفه‌های میدان [11]، [1]

۳. تحلیل تمام-موج با مولفه‌های پتانسیل برداری مغناطیسی و پتانسیل اسکالر الکتریکی [18]

روش اول همان‌طور که از اسم‌اش برمی‌آید، شامل در نظر گرفتن هم‌زمان دو میدان طولی مختلف با هم است [۱۱]. اما روش دوم -که در فصل بعدی از آن استفاده خواهیم کرد- مبتنی بر در نظر گرفتن همه مولفه‌های میدان (الکتریکی یا مغناطیسی) با هم است. یعنی نه تنها مولفه E_z که مولفه‌های E_x ، E_y و E_z را نیز در نظر می‌گیریم. این حالت ۳-بعدی، کامل‌ترین فرمول‌بندی یک مساله الکترومغناطیسی است که در فصل بعد به طور مفصل درباره‌اش توضیح خواهیم داد [11]، [1]. روش سوم از پتانسیل‌ها برای حل مساله استفاده می‌کند و بدین طریق مشکل مدهای ناخواسته^{۴۳} را -که در فصل بعد به توضیح‌اش خواهیم پرداخت- به روشی اساساً متفاوت حل می‌کند [18]. اما با این وجود اگر محیط موج‌برمان همگن باشد، حالات هایبرید به وجود نمی‌آید و می‌توان فرض کرد که تنها دارای مد $TE(H_z)$ و یا $TM(E_z)$ هستیم. با این انتخاب،

⁴² به این مدها، مدهای hybrid هم گفته می‌شود.

⁴³ Spurious Modes

قادر خواهیم بود مساله را تبدیل به مساله‌ای ۲-بعدی بکنیم. برای چنین کاری، لازم است جای‌گذاری‌های زیر را در معادله کلی انجام دهیم:

$$TE(H_z): \begin{cases} \phi = H_z(x, y) \\ \alpha(x, y) = \frac{1}{\varepsilon_r} \\ \beta = k_0^2 \mu_r \\ \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{\Gamma_n} = 0 \quad (\text{Neumann B.C.}) \end{cases} \quad (2-104)$$

و همچنین:

$$TM(E_z): \begin{cases} \phi = E_z(x, y) \\ \alpha(x, y) = \frac{1}{\mu_r} \\ \beta = k_0^2 \varepsilon_r \\ \phi|_{\Gamma_d} = 0 \quad (\text{Dirichlet B.C.}) \end{cases} \quad (2-105)$$

قبل از ادامه خوب است که به چند نکته توجه کنیم: اول این که هر دو شرط مرزی، همگن هستند - یکی از نوع کوشی (که به دلیل همگن بودن و صفر بودن ضریب γ تبدیل به نیومان شده است) و دیگری از نوع دیریچله همگن. دوم این که می‌توان با توجه به معلوماتی که از تحلیل ۱-بعدی داشتیم، حدس بزنیم که در این‌جا شرط اول از نوع ذاتی است و دومی از نوع ضروری و در نتیجه اولی احتیاجی به اعمال شرط مرزی ندارد (البته به دلیل نیومان بودن‌اش) ولی برای دومی باید به طور مجزا شرط مرزی را اعمال کرد.

حال درست مانند قسمت قبل ابتدا فراتابع را از دو روش مختلف ریتز و باقیمانده وزن‌دار به دست می‌آوریم و سپس خردکردن آن را نشان می‌دهیم. از آن‌جا که فرآیند جمع‌آوری در قسمت قبل به صورت کلی بیان شد و اساساً تفاوتی در فرمول‌بندی‌های مختلف (چه ۱-بعدی، چه ۲-بعدی و چه ۳-بعدی) ندارد پس

از بیان دوباره‌اش صرف‌نظر می‌کنم. اعمال شرایط مرزی نیز تقریباً مشابه حالت قبلی است و تنها اشاره‌ای به آن می‌کنم. برای توضیحات بیشتر می‌توانید به مراجعی که مخصوص حالت ۲-بعدی نوشته شده‌اند رجوع کنید.

۲-۳-۱) محاسبه فراتابع با استفاده از روش رایلی-ریتز (اصل وردشی)

در این قسمت از اصل وردشی برای محاسبه فراتابع استفاده می‌کنم. چون قبل فرض می‌کنیم که اپراتورمان حقیقی، خودالحاق و مثبت-تعریف باشد و شرایط مرزی نیز همگن باشند. دلیل این شرایط، نوع اصل وردشی‌ایست که استفاده می‌کنیم^{۴۴}. اصل وردشی و اپراتور بدین شکل‌اند:

$$F(\phi) = \frac{1}{2} \langle L\phi, \phi \rangle - \langle f, \phi \rangle \quad (2-106)$$

$$L = -\nabla_t \cdot (\alpha \nabla_t \phi) + \beta$$

با گسترش انتگرال ضرب‌داخلی، داریم:

$$F(\phi) = -\frac{1}{2} \iint_{\Omega} \nabla_t \cdot (\alpha \nabla_t \phi) \phi^* ds + \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \beta \phi \phi^* ds - \iint_{\Omega} f \phi^* ds \quad (2-107)$$

حال از رابطه اول اسکالر گرین^{۴۵} [مطابق با شماره‌گذاری 11] که به شکل زیر است برای بسط جمله اول استفاده می‌کنیم^{۴۶}:

^{۴۴} گرچه اگر اپراتور حقیقی نباشد باز این نوع اصل وردش معتبر است. ولی من در اینجا ساده‌سازی‌ای انجام داده‌ام و تغییر کوچک در اصل وردش داده‌ام تا محاسبات‌مان ساده شود. برای توضیحات بیشتر به قسمت قبل مراجعه کنید.

^{۴۵} First Scalar Green's Theorem

^{۴۶} ذکر این نکته لازم است که چنین رابطه‌ای برای حالت سه‌بعدی مطرح شده است ولی به شرط استفاده از اپراتور ∇_t -مطابق آنچه تعریف شد- این رابطه برقرار خواهد بود و در اصل همان

$$\int_{\Omega} [a \nabla_t \cdot (u \nabla_t b) + u (\nabla_t a) \cdot (\nabla_t b)] dS = \oint_{\Gamma} a u \frac{\partial b}{\partial n} d\Gamma \quad (\text{First Scalar Green's Theorem}) \quad (2-108)$$

ذکر این نکته لازم است که چنین رابطه‌ای برای حالت سه بعدی مطرح شده است ولی به شرط استفاده از اپراتور ∇_t -مطابق آنچه تعریف شد- به سادگی می‌توان نشان داد که این رابطه نیز برقرار است. در اصل این رابطه شکل آراسته و مرتب شده انتگرال گیری جزء به جزء می‌باشد. به هر حال می‌توان نوشت:

$$F(\phi) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} [\alpha \nabla_t \phi^* \cdot \nabla_t \phi \cdot ds + \beta \phi \phi^*] ds - \iint_{\Omega} f \phi^* \cdot ds - \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \phi^* \alpha \frac{\partial \phi}{\partial n} \cdot d\Gamma \quad (2-109)$$

جمله مربوط به انتگرال روی مرز را می‌توان به دو قسمت مرز دیرپچله و مرز کوشی تقسیم کرد. یعنی:

$$\oint_{\Gamma} \phi^* \alpha \frac{\partial \phi}{\partial n} \cdot d\Gamma = \oint_{\Gamma_d} \phi^* \alpha \frac{\partial \phi}{\partial n} \cdot d\Gamma + \oint_{\Gamma_n} \phi^* \alpha \frac{\partial \phi}{\partial n} \cdot d\Gamma \quad (2-110)$$

مطابق فرض، شرط مرزی مان همگن است ($\phi|_{\Gamma_d} = 0$) و در نتیجه جمله اول صفر می‌شود. برای جمله دوم با فرض همگنی داریم:

$$(\alpha \nabla \phi) \cdot \hat{n} + \gamma \phi|_{\Gamma_n} = q \stackrel{q=0}{\Rightarrow} (\alpha \nabla \phi) \cdot \hat{n}|_{\Gamma_n} = -\gamma \phi|_{\Gamma_n} \quad (2-111)$$

و در نتیجه:

$$F(\phi) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} [\alpha \nabla_t \phi^* \cdot \nabla_t \phi \cdot ds + \beta \phi \phi^*] ds - \iint_{\Omega} f \phi^* \cdot ds + \frac{1}{2} \oint_{\Gamma_n} \gamma \phi \phi^* \cdot d\Gamma \quad (2-112)$$

و یا:

$$F(\phi) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} [\alpha |\nabla_i \phi|^2 + \beta |\phi|^2] ds - \iint_{\Omega} f \phi^* . ds + \frac{1}{2} \oint_{\Gamma_n} \gamma |\phi|^2 . d\Gamma \quad (2-113)$$

که اگر فرض کنیم اپراتورمان حقیقی باشد، با گسترش $\nabla_i \phi$ به شکل زیر از رابطه می‌رسیم که بسیار شبیه به رابطه حالت ۱-بعدی است:

$$F(\phi) = \iint_{\Omega} \left[\alpha \left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right) + \beta \phi^2 \right] . ds - \iint_{\Omega} f \phi^* . ds + \frac{1}{2} \oint_{\Gamma_n} \gamma \phi^2 . d\Gamma \quad (2-114)$$

و به عنوان آخرین رابطه، اگر حالت کلی ورودی را به کار ببریم و شرایط مرزی ناهمگن را نیز در نظر بگیریم، می‌توانیم بنویسیم:

$$F(\phi) = \iint_{\Omega} \left[\alpha \left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right) + \beta \phi^2 \right] . ds - \iint_{\Omega} f \phi^* . ds + \oint_{\Gamma_n} \left(\frac{1}{2} \gamma \phi^2 - q \phi \right) . d\Gamma \quad (2-115)$$

باز هم باید اشاره کنم که شرط مرزی کوشی، شرط مرزی ذاتی مساله است در حالی که شرط دیریچله، شرط ضروری است و باید به طور جداگانه -مانند قبل- اعمال شود.

۲-۳-۱) محاسبه فراتابع با استفاده از روش باقیمانده وزن‌دار

به‌دست آوردن فراتابع با استفاده از روش باقیمانده وزن‌دار بسیار شبیه به روش قبلی است. با این وجود

ایده ریاضی پس آن‌ها از هم متفاوت است. باقیمانده در مساله ۲-بعدی مان به صورت زیر است:

$$R(x, y) = -\nabla_t \cdot (\alpha \nabla_t \phi) + \beta \phi - f \quad (2-116)$$

و باقیمانده وزن دار نیز به صورت زیر می شود^{۴۷}:

$$W(\phi, \psi) = \iint_{\Omega} R(\phi) \cdot \psi \cdot ds = 0 \Rightarrow W(\phi, \psi) = \iint_{\Omega} [-\nabla_t \cdot (\alpha \nabla_t \phi) \psi + \beta \phi \psi - f \psi] ds = 0 \quad (2-117)$$

اگر از رابطه اول اسکالر گرین با همان توضیحاتی که قسمت قبل دادم استفاده کنیم، می توان نوشت:

$$W(\phi, \psi) = \iint_{\Omega} [\alpha (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi) + \beta \phi \psi - f \psi] ds + \oint_{\Gamma} \alpha \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma \quad (2-118)$$

که نتیجه حاصل بسیار شبیه به فرمول بندی است که با اصل وردشی محاسبه شده است. چون قبل، اگر $\psi = \phi$ باشد آن گاه روش باقیمانده وزن دار از نوع گالرکین خواهد بود که مطابق آنچه گفتیم در حالاتی درست به همان معادلاتی منتج می شود که از ایستا کردن اصل وردشی در روش ریتز به دست می آید. درباره شرایط مرزی در این قسمت صحبتی نمی کنم و تنها به ذکر این نکته اکتفا می کنم که در مرزهای نیومان مقدار انتگرال صفر می شود و در بخش های دیگر نیز مطابق قبل عمل می شود.

۲-۳-۲) خرد کردن فراتابع

در این بخش مانند بخش مربوط به حالت ۱-بعدی، فراتابع به دست آمده از یکی از دو روش پیشین را به کمک توابع گسترش مان تقریب می زنیم. در این جا نیز مانند قبل تقریب در محدوده المان ها صورت می گیرد و تقریب در کل فضای مکانی مساله نیست. در این حالت دو مساله مطرح می شود:

⁴⁷ باز درست مانند حالت ۱-بعدی- برای سادگی فرض شده اپراتور ضرب داخلی مان حقیقی باشد.

۱. شکل المان

۲. نوع تابع گسترش المان

که البته به هم مربوطند. المان‌های مختلفی برای تقریب مکانی به کار می‌روند که دو توپولوژی اصلی و متداول آن‌ها این‌ها هستند:

۱. المان‌های مثلثی^{۴۸}

۲. المان‌های مستطیلی^{۴۹} و چهاروجهی^{۵۰}

همان‌طور که از اسم‌شان برمی‌آید این‌ها دو شکل مختلف المان‌هایی هستند که برای تقریب فضا به تعدادی زیرفضا استفاده می‌شوند. هر کدام از این‌ها می‌توانند دارای تعداد درجات آزادی متفاوتی باشند. مثلاً این تعداد در ساده‌ترین حالت برای مثلث، ۳ درجه آزادی (هر کدام به ازای یک راس) و برای مستطیل و چهاروجهی ۴ درجه می‌باشد. اما تعداد درجات این‌ها می‌توانند بیش‌تر نیز باشند. مثلاً اگر در فاصله هر دو راس مثلث (یا مستطیل) یک گره درجه آزادی در نظر گرفته شود، آن‌گاه تعداد درجات آزادی به ۶ (و ۸) درجه افزایش خواهد یافت. علاوه بر این‌ها، ممکن است تبدیلی هندسی نیز بر این المان‌ها انجام شده باشد که نتیجه‌اش تغییر شکل آن‌هاست. در آن صورت دیگر المان مثلثی به معنای المانی که دارای سه ضلع مستقیم می‌باشد نخواهد بود، بلکه شکلی است دارای سه راس ولی با اضلاعی منحنی. فایده‌ی این نوع اخیر در بهتر مدل کردن انحناهای جسم است. المان‌هایی که دارای اضلاعی منحنی هستند معمولاً دارای توابع گسترشی از درجه بالاتر از یک می‌باشند^{۵۱}. با این‌وجود در این پایان‌نامه به بررسی انواع المان‌ها نخواهم

⁴⁸ Triangular

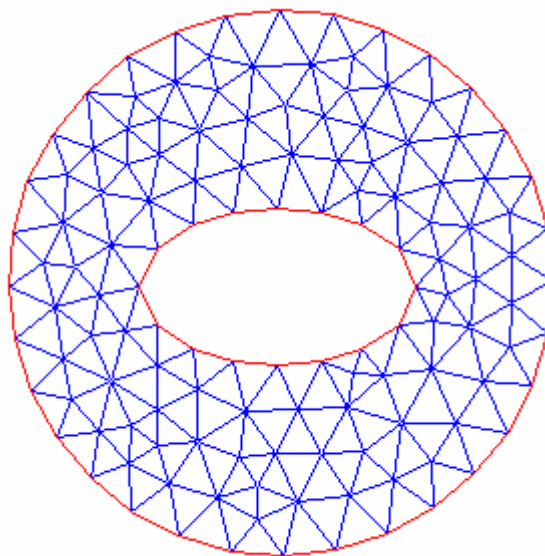
⁴⁹ Rectangular

⁵⁰ Quadrilateral

⁵¹ مگر این‌که المان‌هایی superparametric باشند.

پرداخت و از میان همه انواع المان‌های ۲-بعدی، المان مثلثی مرتبه اول را معرفی خواهیم کرد. البته با این کار چیز چندانی را از دست نمی‌دهیم چون المان غالب در FEM همین نوع المان است.^{۵۲}

مساله مهم دیگری که در FEM مطرح می‌شود، تولید مش است - که به معنای تقسیم فضای مکانی مان به المان‌هاست. این که چگونه یک جسم را به تعدادی مثلث (یا مستطیل) تقسیم کنیم در حالت کلی مساله پیچیده‌ایست و تحقیقات بسیاری درباره‌اش انجام می‌شود. این مساله هنگامی پیچیده‌تر می‌شود که بدانیم در تولید مش پارامترهای زیادی مطرح می‌شوند. به عنوان نمونه عناصر مثلثی نباید دارای زاویه‌های بسیار تیز باشند چون سرعت هم‌گرایی (و در نتیجه دقت پاسخ‌مان) کم می‌شود [۱]. و یا این که هرچه شماره‌ی عمومی گره‌های المان‌های مجاور به هم نزدیک‌تر باشد، ماتریس حاصل دارای عرض باند^{۵۳} کم‌تری است و این برای حل‌کننده‌ها مزیتی حساب می‌شود. در این پایان‌نامه به روند تولید مش برای حالت ۲-بعدی نمی‌پردازم و فرض می‌کنم جسم به درستی به تعدادی المان تقسیم شده است. برای اطلاعات بیشتر به [16] مراجعه کنید. نمونه‌ای از مش‌بندی بی‌ساختار با استفاده از المان‌های مثلثی را در شکل



شکل ۲-۳- نمونه‌ای از مش‌بندی با المان‌های مثلثی

^{۵۲} به طور کلی، المان‌های مثلثی می‌توانند ترکیب‌بندی‌های پیچیده‌تری را نسبت به المان‌های چهاروجهی با دقت بیشتری مدل کنند. اما جدا از این، بالا رفتن تعداد درجات آزادی در هر المان به هر حال در دقت پاسخ‌ها موثر است ولی باعث پیچیده شدن فرمول‌بندی خواهد شد.

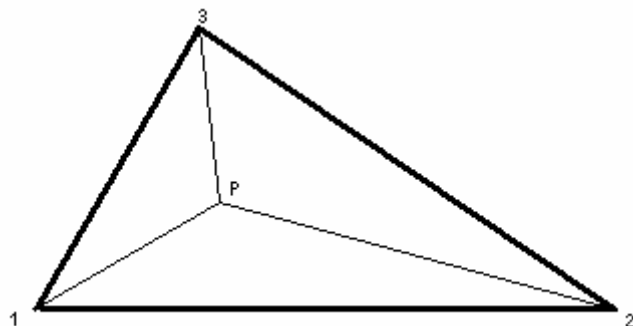
^{۵۳} Band width

می بینید.

هم چون قبل ابتدا تابع پاسخمان را با استفاده از توابع گسترش ۲-بعدی مان تقریب می زنیم.

$$\phi^e(x, y) = \sum_{i=1}^3 \phi_i^e N_i^e(x, y) \xRightarrow{\text{whole domain}} \phi(x, y) = \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^3 \phi_i^e N_i^e(x, y) = \{N\}^T \{\phi\} \quad (2-119)$$

تعریف توابع گسترش در حالت ۲-بعدی از روی شکل بدین صورت است::



شکل ۲-۴- المان مثلثی

$$N_1^e(x, y) = \frac{\text{area}(\Delta P23)}{\text{area}(\Delta 123)} = \frac{\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2^e & y_2^e \\ 1 & x_3^e & y_3^e \end{vmatrix}}{\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1^e & y_1^e \\ 1 & x_2^e & y_2^e \\ 1 & x_3^e & y_3^e \end{vmatrix}} \quad (2-120)$$

$$N_2^e(x, y) = \frac{\text{area}(\Delta P13)}{\text{area}(\Delta 123)} = \frac{\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1^e & y_1^e \\ 1 & x & y \\ 1 & x_3^e & y_3^e \end{vmatrix}}{\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1^e & y_1^e \\ 1 & x_2^e & y_2^e \\ 1 & x_3^e & y_3^e \end{vmatrix}} \quad (2-121)$$

$$N_3^e(x, y) = \frac{area(\Delta P12)}{area(\Delta 123)} = \frac{\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1^e & y_1^e \\ 1 & x_2^e & y_2^e \\ 1 & x & y \end{vmatrix}}{\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1^e & y_1^e \\ 1 & x_2^e & y_2^e \\ 1 & x_3^e & y_3^e \end{vmatrix}} \quad (2-122)$$

که در ضمن می‌توان به صورت زیر نیز نشان‌شان داد:

$$N_i^e(x, y) = \frac{1}{2\Delta^e} (a_i^e + b_i^e x + c_i^e y) \quad i = 1, 2, 3 \quad (2-123)$$

$$\Delta^e = area(\Delta 123)$$

از چنین رابطه‌ای بعداً استفاده خواهیم کرد.

این نوع المان‌ها را، المان‌های لاگرانژ می‌نامند. دلیل چنین نام‌گذاری‌ای چگونگی تشکیل آن‌هاست که شبیه به شیوه‌ی لاگرانژ برای درونیابی با استفاده از چندجمله‌ای‌هاست [۱]. این المان‌ها البته همان‌طور که در پیش گفتم می‌توانند از مرتبه‌های بالاتر نیز باشند. این المان‌ها مناسب برای تقریب توابع اسکالر هستند (و به همین دلیل به آن‌ها المان‌های اسکالر^{۵۴} و یا المان‌های گره^{۵۵} نیز می‌گویند) اما با تمهیداتی می‌توان از آن‌ها برای تقریب توابع برداری نیز استفاده کرد. اما با این‌حال المان‌های دیگری نیز وجود دارند که مختص تقریب توابع برداری هستند. این المان‌ها که به نام‌های مختلفی چون المان‌های برداری^{۵۶}، المان‌های وجهی^{۵۷} و همچنین المان‌های ویتنی^{۵۸} شناخته شده‌اند، امروزه روز بسیار در FEM به کار می‌روند و اکثر مشکلاتی که در المان‌های اسکالر وجود داشت را از بین برده‌اند. با این‌وجود در این پایان‌نامه بحثی در مورد آن‌ها نخواهم کرد.

^{۵۴} Scalar elements

^{۵۵} Node elements

^{۵۶} Vector elements

^{۵۷} Edge elements

^{۵۸} Whitney Elements

این توابع گسترش دو خاصیت مهم دارند. یکی این که مقدار تابع گسترش مربوط به راس λ ، ۱ است و بر روی دو راس دیگر $\bullet$ می باشد. یعنی:

$$N_i^e(x_j, y_j) = \delta_{i,j} \quad (2-124)$$

خاصیت دیگر که نتیجه مستقیم همین ویژگی قبل می باشد، صفر بودن شان بر روی ضلع روبروی راس می باشند.

حال مطابق قبل، فراتابع به دست آمده را با استفاده از روش ریتز خرد می کنیم. در این بخش از جمله مربوط به شرایط مرزی ذاتی که ناشی از وجود شرط مرزی کوشی است (و البته نه حالت خاص نیومان آن) صرف نظر می کنیم. این در مورد مسایل مقادیر ویژه، فرض درستی است. همچنین لازم است بگوییم که توضیحات این بخش، شبیه حالت ۱- بعدی است و در نتیجه تا حد ممکن از بیان دوباره شان صرف نظر می کنیم:

$$F(\phi) = \sum_{e=1}^N F(\phi^e) = \sum_{e=1}^N F(\{N^e\}^T \{\phi^e\}) \quad (2-125)$$

$$F(\phi^e) = F(\{N^e\} \{\phi^e\}) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[\alpha (\nabla_t (\{N^e\}^T \{\phi^e\}))^2 + \beta (\{N^e\}^T \{\phi^e\})^2 \right] ds - \iint_{\Omega} f(\{N^e\}^T \{\phi^e\}) ds \quad (2-126)$$

و حال می خواهیم شرط ایستایی را محقق کنیم. پس باید فراتابع نسبت به تغییر بی نهایت کوچک هر کدام از درجات آزادی، ثابت بماند تا در نقطه اکسترمم (معادل ایستایی) قرار گرفته باشد:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(\{N^e\}^T \{\phi^e\})}{\partial \phi_i^e} &= 0 = \iint_{\Omega} \left[\alpha (\nabla_i (\{N^e\}^T \{\phi^e\})) \frac{\partial (\nabla_i \{N^e\} \{\phi^e\})}{\partial \phi_i^e} + \beta (\{N^e\}^T \{\phi^e\}) \frac{\partial (\{N^e\}^T \{\phi^e\})}{\partial \phi_i^e} \right] ds \\
&\quad - \iint_{\Omega} f \frac{\partial (\{N^e\}^T \{\phi^e\})}{\partial \phi_i^e} ds \\
\Rightarrow \frac{\partial F(\{N^e\}^T \{\phi^e\})}{\partial \phi_i^e} &= \iint_{\Omega} [\alpha (\{\phi^e\}^T \nabla_i (\{N^e\})) \nabla_i N_i^e + \{\phi^e\} \beta \{N^e\} N_i^e] ds - \iint_{\Omega} f N_i^e ds
\end{aligned}
\tag{2-127}$$

و با بسط توابع گسترش درون هر المان خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{\partial F(\{N^e\}^T \{\phi^e\})}{\partial \phi_i^e} &= \sum_{j=1}^3 \phi_j^e \left[\iint_{\Omega} [\alpha (\nabla_i N_j^e \cdot \nabla_i N_i^e) + \beta \cdot N_j^e N_i^e] ds \right] - \iint_{\Omega} f N_i^e ds \\
&= \sum_{j=1}^3 \phi_j^e \left[\iint_{\Omega} \left[\alpha \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) + \beta \cdot N_i^e N_j^e \right] ds \right] - \iint_{\Omega} f N_i^e ds = 0
\end{aligned}
\tag{2-128}$$

هر المان در این حالت دارای ۳ تابع گسترش محلی است. در نتیجه، می توان این انتگرال را به صورت ضرب ماتریس های زیر با ابعادی که مشخص شده اند نوشت:

$$[K^e]_{3 \times 3} [\phi^e]_{3 \times 1} = [b^e]_{3 \times 1} \tag{2-129}$$

حال باید این انتگرال ها را محاسبه کرد. این انتگرال ها در حالت کلی توسط روش های عددی انتگرال گیری حل می شوند. اما اگر فرض کنیم مرتبه توابع گسترش ۱ باشد و به شکلی که بیان شد تعریف شده باشند، آن گاه از رابطه های آنالیتیک زیر می توان برای محاسبه آن ها استفاده کرد [۱۱]:

$$\iint_s (N_1^e).(N_2^e).(N_3^e)ds = \frac{l!m!n!}{(l+m+n+2)!}.2\Delta^e$$

$$\frac{\partial N_i^e}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta^e}b_i^e \quad (2-130)$$

$$\frac{\partial N_i^e}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta^e}c_i^e$$

که b_i^e و c_i^e در بخش معرفی تابع گسترش ۲-بعدی مرتبه اول برای المان مثلثی معرفی شدند. با جای‌گذاری این روابط در فرم خردشده فراتابع، روابط زیر به دست می‌آیند:

$$K_{ij}^e = \frac{\alpha}{4\Delta^e}(b_i^e b_j^e + c_i^e c_j^e) + \frac{\Delta^e}{12}\beta^e(1 + \delta_{ij})$$

$$b_i^e = \frac{\Delta^e}{3}f^e \quad (2-131)$$

و از این ماتریس‌های محلی می‌توان مطابق فرآیندی که در بخش جمع‌آوری گفته شد، ماتریس عمومی را ساخت.

اکنون همین کار را با استفاده از روش باقیمانده وزن‌دار با تابع وزن مشابه تابع گسترش (روش گالرکین) انجام می‌دهیم:

$$W(\{N^e\}^T \{\phi^e\}, \{N^e\}) = \iint_{\Omega} [\alpha(\nabla(\{N^e\}^T \{\phi^e\})) \cdot (\nabla\{N^e\}) + \beta(\{N^e\}^T \{\phi^e\})\{N^e\} - f\{N^e\}]ds +$$

$$\oint_{\Gamma} \alpha\psi \frac{\partial \phi}{\partial n}.d\Gamma \quad (2-132)$$

توجه کنید که تابع وزن را در جمله انتگرال مرزی تقریب نزده‌ام.

$$W(\{N^e\}^T \{\phi^e\}, \{N^e\}) = \sum_{j=1}^3 \phi_j^e \iint_{\Omega} [\alpha (\nabla N_i^e) \cdot (\nabla \{N^e\}) + \beta \cdot N_i^e \{N^e\} - f \{N^e\}] ds + \oint_{\Gamma} \alpha \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma \quad (2-133)$$

و اگر توابع وزن را گسترش دهیم، خواهیم داشت:

$$W(\{N^e\}^T \{\phi^e\}, N_j) = \sum_{j=1}^3 \phi_j^e \iint_{\Omega} [\alpha (\nabla N_i^e) \cdot (\nabla N_j^e) + \beta \cdot N_i^e N_j^e - f N_j^e] ds + \oint_{\Gamma} \alpha \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma \quad (2-134)$$

در منطقه‌ای که شرط مرزی نیومان باشد، به راحتی دیده می‌شود که جمله مقدار انتگرال مرزی صفر می‌شود. اما در حالت کلی کوشی و یا دیریچله، می‌بایست این انتگرال را به طور جداگانه روی مرز بسط داد که در این جا به آن پرداخته نمی‌شود و تنها به ذکر این نکته اکتفا می‌کنم که اعمال شرط مرزی دیریچله مانند حالت ۱-بعدی در مرحله‌ای جداگانه انجام می‌شود و برای اعمال شرط مرزی کوشی، می‌بایست از بسط جداگانه‌ای که ۱-بعدی است استفاده کرد (چون بسط بر روی مرز است که منحنی‌ای ۱-بعدی محسوب می‌شود) که به دلیل این که در مساله محفظه رزونانسی به کار نمی‌آید، از بیان‌اش صرف نظر می‌کنم.

در این فصل چگونگی به کارگیری روابط ریاضی فصل قبل را در FEM دیدیم. توانستیم فراتابع یک مساله PDE را به دست آوریم و سپس با معرفی توابع گسترش در حالت ۱-بعدی و ۲-بعدی، فراتابع‌مان را خرد کردیم. پس از آن چگونگی فرآیند جمع‌آوری را ملاحظه کردیم و در نهایت به نحوه اعمال شرایط مرزی -که بسیار مهم است- پرداختیم. توضیح‌ام در مورد شرایط مرزی حالت ۱-بعدی کامل بود ولی برای حالت ۲-بعدی مختصرتر (به آن صورتی که در مساله فصل بعد به کارمان می‌آید) به توضیح‌اش پرداختیم. در فصل

بعد به فرمول‌بندی خود مساله مورد نظر – محفظه رزونانسی فلزی – خواهیم پرداخت. البته فرمول‌بندی‌ای که عنوان خواهد شد کلی‌تر از آن خواهد بود و با تغییراتی می‌توان اکثر مسایل ۳-بعدی را تحلیل کرد.

“Whenever a system becomes completely defined, some damn fool discovers something which either abolishes the system or expands it beyond recognition. “

-Murphy's Law

فصل سوم

فرکانس‌های رزونانس محفظه‌ی فلزی

۳-۱) مقدمه

در دو فصل پیش، اصول FEM را به طور کامل بیان کردم. با دو روش مختلف، فراتابع مورد نیاز برای FEM را به دست آوردم و سپس آن را به فراتابع‌هایی که در هر المان خرد کردم و شرط ایستایی (یا صفر بودن باقیمانده وزن‌دار) را برقرار کردم. علاوه بر این‌ها، چگونگی اعمال شرایط مرزی را توضیح دادم. هدف اصلی دو فصل قبل - و مخصوصاً فصل پیشین - آوردن مثال‌هایی برای این فصل بود. در این فصل به حالت بسیار کلی‌تر مسایل الکترومغناطیسی در ۳-بعد می‌پردازم که به دلیل پیچیدگی نسبی فرمول‌بندی آن نسبت به معادلات ۱-بعدی و ۲-بعدی، چندان مناسب نمی‌نمود که در یک رساله کارشناسی به طور مستقیم به سراغ‌اش می‌رفتم.

مساله‌ای که در این فصل حل خواهیم کرد، محاسبه مدهای رزونانسی یک محفظه فلزی است. این، کلی‌ترین حالت یک مساله مقادیرویزه در الکترومغناطیس است و یک مساله موج‌بری عملاً حالت خاصی از آن است. فرمول‌بندی‌ای که در این جا بیان می‌شود بدون تغییر چندانی قابل اعمال به اکثر مسایل الکترومغناطیسی ۳-بعدی است. در این فرمول‌بندی که فرمول‌بندی‌ای تمام-موج است، مطابق فصل قبل از المان‌های گره‌ای استفاده می‌شود که البته مشکلاتی خواهد داشت که در بخش‌های بعدی درباره‌اش توضیح خواهیم داد.

در این فصل، ابتدا معادله موج به طور کلی معرفی می‌گردد و سپس فراتابع مساله PDE به دو طریق محاسبه می‌شود. سپس المان ۳-بعدی‌ای که از آن بهره خواهیم برد معرفی می‌شود و قبل از مرحله خردکردن، به مساله‌ای به نام مدهای ناخواسته می‌پردازیم و تغییری در فراتابع می‌دهیم تا آن مشکل حل

شود. پس از خردکردن، چگونگی اعمال شرایط مرزی که کمی متفاوت با حالت‌های قبلی است بررسی می‌شود و در نهایت با مقایسه پاسخ‌های عددی و آنالیتیک چند مساله مشخص، این روش مورد محک واقع می‌شود.

۳-۲) معادله موج برداری و محفظه رزونانسی

معادله موج برداری در حالت کلی به شکل زیر است^۱ [۱۵]:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times E \right) - k_0^2 \epsilon_r E = -jk_0 \eta_0 J - \nabla \times \left(\frac{M}{\mu_r} \right) \quad (3-1)$$

برای فرمول‌بندی میدان الکتریکی و

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\epsilon_r} \nabla \times H \right) - k_0^2 \mu_r H = -jk_0 Y_0 J - \nabla \times \left(\frac{J}{\epsilon_r} \right) \quad (3-2)$$

برای فرمول‌بندی میدان مغناطیسی که J و M به ترتیب منبع جریان الکتریکی و مغناطیسی هستند (حتی

اگر دومی تعبیر فیزیکی مشخصی نداشته باشد) و $\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ امپدانس ذاتی خلاست و $Y_0 = \frac{1}{\eta_0}$ می‌باشد.

k_0 مقداری است که می‌خواهیم در مساله محفظه رزونانسی به دست آوریم.

در FEM، باید این معادله موج را همراه با شرایط مرزی مناسب حل کنیم. در این پایان‌نامه من از فرمول‌بندی میدان الکتریکی استفاده کرده‌ام. انتخاب یکی از این از دید الکترومغناطیسی هیچ تفاوتی ندارد گرچه در فرمول‌بندی FEM می‌تواند باعث تفاوت‌هایی در پاسخ مساله شود [1]، [11]. علت هم وجود

^۱ در این فصل E و H بردار در فضای ۳-بعدی هستند مگر این‌که به صراحت خلاف‌اش بیان شود.

تقریبی است که به طور ذاتی در FEM وجود دارد - چه تقریب توابع گسترش المان و چه تقریبی که در شرایط مرزی (به خصوص شرط مرزی ذاتی) زده شده است.^۲ این مساله بیش تر وقتی نمود پیدا می کند که محیط دارای موادی با خاصیت الکتریکی یا مغناطیسی بالا باشد. اما در این مساله چنین فرضی نشده است. با این همه، تفاوت بین این دو با بالا بردن درجات آزادی مساله (دقیق تر کردن مش بندی) حل می شود چون پاسخ هر دو فرمول بندی به یک نقطه هم گرا می شود. در محفظه رزونانسی ما منبع جریان نداریم. پس با در نظر گرفتن شرایط مرزی، مساله PDE به صورت زیر می شود:

$$\begin{cases} \nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} \right) - k_0^2 \epsilon_r \vec{E} = 0 \\ \hat{n} \times \vec{E} = 0 \quad \text{on } \Gamma_d \text{ (Perfect Electric Conductor)} \\ \hat{n} \times \nabla \times \vec{E} = (\hat{n} \cdot \vec{E}) = 0 \quad \text{on } \Gamma_n \text{ (Perfect Magnetic Conductor)} \end{cases} \quad (3-3)$$

PMC عملاً برای کاهش ابعاد مساله و استفاده از تقارن به کار می رود. در این پایان نامه هیچ استفاده ای از این تقارن برای کوچک کردن مساله نکرده ام چون کاملاً بستگی به مش بندی مان دارد. با این حال استفاده از آن عملاً بسیار ساده است: می بایست تنها نصف مش تولید شود و بر سطح تقارن شرط مرزی ای اعمال نشود (چون PMC شرط مرزی ذاتی مساله است و چون از نوع نیومان می باشد احتیاج به هیچ گونه تغییری در فراتابع هم نیست).

^۲ شرط مرزی ذاتی در FEM اگر به طور ذاتی توسط المان ارضا نشود، به صورت distributed sense اعمال می شود و این تقریبی است که باعث شده پیش نهاد شود در مسابلی شرط مرزی ذاتی هم به طور جداگانه اعمال شود.

۳-۳ محاسبه فراتابع با استفاده از روش رایلی-ریتز (اصل وردشی)

از آن جا که مساله‌ی ما دارای منبع نمی‌باشد، پس به سادگی می‌توان نوشت^۳:

$$F(\vec{E}) = \frac{1}{2} \langle L\vec{E}, \vec{E} \rangle \quad (3-4)$$

و اپراتور هم به شکل زیر است:

$$L = \nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \right) - k_0^2 \epsilon_r \quad (3-5)$$

پس خواهیم داشت:

$$F(\vec{E}) = \frac{1}{2} \iiint_V \left\{ \nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} \right) \cdot \vec{E}^* - k_0^2 \epsilon_r \vec{E} \cdot \vec{E}^* \right\} dv \quad (3-6)$$

رابطه برداری گرین را می‌نویسم:

$$\iiint_V [u(\nabla \times a) \cdot (\nabla \times b) - a \cdot (\nabla \times (u \nabla \times b))] dv = \iint_S u(a \times \nabla \times b) \cdot \hat{n} ds \quad (3-7)$$

پس $F(E)$ را به صورت زیر می‌توان نوشت:

^۳ ضرب داخلی در این جا به صورت برداری، یعنی $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \iiint_V \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} dv$ تعریف می‌شود.

$$F(\vec{E}) = \frac{1}{2} \iiint_V \left\{ \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \vec{E}) \cdot (\nabla \times \vec{E}^*) - k_0^2 \epsilon_r \vec{E} \cdot \vec{E}^* \right\} dv - \frac{1}{2} \oint_S \frac{1}{\mu_r} (\vec{E}^* \times \nabla \times \vec{E}) \cdot \hat{n} ds \quad (3-8)$$

با دوبار به کارگیری رابطه برداری $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ داریم:

$$[\vec{E}^* \times (\nabla \times \vec{E})] \cdot \hat{n} = -\hat{n} \cdot ((\nabla \times \vec{E}) \times \vec{E}^*) = jk_0 \eta_0 \hat{n} \cdot (\vec{H} \times \vec{E}^*) = jk_0 \eta_0 \vec{E}^* \cdot (\hat{n} \times \vec{H}) \quad (3-9)$$

$$[\vec{E}^* \times (\nabla \times \vec{E})] \cdot \hat{n} = (\nabla \times \vec{E}) \cdot (\hat{n} \times \vec{E}^*) = -jk_0 \eta_0 \vec{H} \cdot (\hat{n} \times \vec{E}^*) \quad (3-10)$$

بر روی PEC، رابطه سطر دوم صفر می‌شود و بر روی PMC، رابطه سطر اول. در نتیجه اگر انتگرال را به دو قسمت تقسیم کنیم و این مقادیر را جای‌گذاری کنیم، انتگرال سطح صفر می‌شود و خواهیم داشت:

$$F(\vec{E}) = \frac{1}{2} \iiint_V \left\{ \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \vec{E}) \cdot (\nabla \times \vec{E})^* - k_0^2 \epsilon_r \vec{E} \cdot \vec{E}^* \right\} dv \quad (3-11)$$

و این فراتابع مورد نظرمان است. همان‌طور که می‌بینید، مقدار انتگرال معادل تفاضل انرژی مغناطیسی و الکتریکی در حجم است و هدف ما ایستاسازی آن است: کم‌ترین مقدار، یا بیش‌ترین مقدار یا نقطه زینی^{۴،۵}.

۳-۴ محاسبه فراتابع با استفاده از روش باقیمانده وزن‌دار

باقیمانده به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R(\vec{E}) = \nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} \right) - k_0^2 \epsilon_r \vec{E} \quad (3-12)$$

⁴ Saddle point

⁵ چون اپراتورمان الزاماً مثبت تعریف نیست.

و باقیمانده وزن دار که مایل به صفر کردن اش هستیم، به شکل زیر:

$$W(\vec{E}, \vec{\psi}) = \frac{1}{2} \iiint_V \left\{ \nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} \right) \cdot \vec{\psi}^* - k_0^2 \epsilon_r \vec{E} \cdot \vec{\psi}^* \right\} dv \quad (3-13)$$

و با استفاده از رابطه برداری گرین درست مانند قبل داریم:

$$W(\vec{E}, \vec{\psi}) = \frac{1}{2} \iiint_V \left\{ \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \vec{E}) \cdot (\nabla \times \vec{\psi}^*) - k_0^2 \epsilon_r \vec{E} \cdot \vec{\psi}^* \right\} dv - \frac{1}{2} \oint_S \frac{1}{\mu_r} (\vec{\psi}^* \times \nabla \times \vec{E}) \cdot \hat{n} ds \quad (3-14)$$

داریم:

$$[\vec{\psi}^* \times (\nabla \times \vec{E})] \cdot \hat{n} = (\nabla \times \vec{E}) \cdot (\vec{\psi}^* \times \hat{n}) = -jk_0 \eta_0 \vec{H} \cdot (\vec{\psi}^* \times \hat{n}) \quad (3-15)$$

$$[\vec{\psi}^* \times (\nabla \times \vec{E})] \cdot \hat{n} = (\hat{n} \times \vec{\psi}^*) \cdot (\nabla \times \vec{E}) = -\vec{\psi}^* \cdot [\hat{n} \times (\nabla \times \vec{E})] \quad (3-16)$$

که مطابق قبل، جمله روی مرز PMC صفر می شود. برای صفر شدن بخش PEC، می بایست $(\hat{n} \times \vec{\psi}^*)$ صفر گردد. درست مثل آن چه در که در فصل پیش گفتم، می توانیم تابع وزن را به گونه ای انتخاب کنیم که روی سطح دیرپچله، $(\hat{n} \times \vec{\psi}^*) = 0$ شود. البته می توان آن را گسترش داد و نشان داد که تاثیرش مشابه با همین انتخاب است. در نتیجه خواهیم داشت:

$$W(E, \psi) = \frac{1}{2} \iiint_V \left\{ \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times E) \cdot (\nabla \times \psi^*) - k_0^2 \epsilon_r E \cdot \psi^* \right\} dv \quad (3-17)$$

می بینید که اگر $\psi = E$ (تابع وزن گالرکین) انتخاب شود، فرمول بندی این دو روش یکسان خواهد شد.

۳-۵) المان‌های ۳-بعدی و بسط تمام-موج میدان

در فصل قبل با المان‌های مختلفی آشنا شدید و توابع گسترش برای المان خط و مثلثی مرتبه اول بیان شد. در اینجا نیز المانی مناسب برای حالت ۳-بعدی را معرفی خواهیم کرد. اما پیش از ادامه، لازم است بحثی درباره چگونگی تقریب‌مان انجام دهیم.

در حالات قبل، فرض می‌کردیم که می‌توان به وسیله متغیری اسکالر (که با ϕ آن را نشان می‌دادیم) پاسخ مساله را بیان کرد. در نتیجه درجات آزادی‌مان در نهایت کمیتی اسکالر بودند. به عنوان مثال در فصل قبل از فرمول‌بندی مدهای هایبرید یک موج‌بر اجتناب کردم و تنها به مدهای TE و TM که با میدان H_z و E_z به طور کامل مشخص می‌شدند پرداختم. اما هدف نهایی این پایان‌نامه در نهایت تحلیل تمام-موج مساله الکترومغناطیسی است. بدین معنا که همه سه مولفه بردار میدان — با هم — در تحلیل دخیل باشند: E_y, E_x و E_z (یا مشابه‌شان برای میدان مغناطیسی). اما توابع تقریب ما که به شکل زیر معرفی می‌شدند، اسکالر بودند:

$$\phi = \sum_{i=1}^N \phi_i N_i \quad (3-18)$$

پس ما بایست به گونه‌ای این مشکل را برطرف کنیم. برای این کار می‌توان به این نکته دقت کرد که یک بردار در فضای ۳-بعدی را می‌توان توسط ۳ مولفه اسکالر مشخص کرد^۶. اگر دستگاه مختصات مان دکارتی باشد، داریم:

$$\vec{E} = E_x \hat{a}_x + E_y \hat{a}_y + E_z \hat{a}_z \quad (3-19)$$

^۶ حال هر دستگاه مختصاتی که می‌خواهد باشد. تنها شرط این است که کل فضا را پوشش دهد.

و حال می‌توان هر کدام از این مولفه‌ها را به طور جداگانه‌ای بسط داد:

$$E_x = \sum_{i=1}^N E_{x_i} N_{x_i} \quad (3-20)$$

$$E_y = \sum_{i=1}^N E_{y_i} N_{y_i} \quad (3-21)$$

$$E_z = \sum_{i=1}^N E_{z_i} N_{z_i} \quad (3-22)$$

پس می‌توان نوشت:

$$E = \left(\sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{n_e} E_{x_i}^e N_{x_i}^e \right) \hat{a}_x + \left(\sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{n_e} E_{y_i}^e N_{y_i}^e \right) \hat{a}_y + \left(\sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{n_e} E_{z_i}^e N_{z_i}^e \right) \hat{a}_z \quad (3-23)$$

و با جای‌گذاری این در فراتابع، مساله را به صورت تمام‌موج حل نمود.

چون حالت ۲-بعدی انتخاب‌های متعددی برای نوع المان داریم. این انتخاب‌ها هم در توپولوژی المان

است و هم در درجه چندجمله‌ای آن. توپولوژی‌های معمول المان ۳-بعدی، این‌ها هستند:

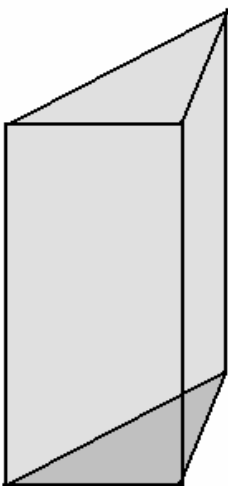
- چهاروجهی
- منشور مثلثی
- مکعب مستطیل

که البته چون قبل می‌توانند دارای سطوح منحنی باشند: دلیلی بر صفحه بودن وجوه‌شان نیست.

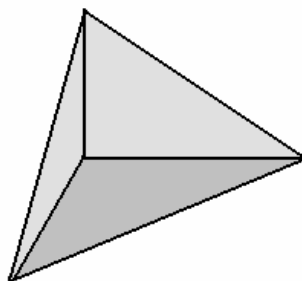
المان مکعب مستطیلی، برای مش‌بندی اجسام مکعبی یا کلا اجسامی که دارای شکل پله‌ای هستند

مناسب‌ترند. اما چهاروجهی توانایی تقریب هر نوع شکلی را دارند و با وجود این که مش‌بندی با استفاده از آن

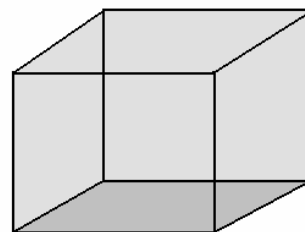
برای بعضی از ترکیب‌های ساده سخت‌تر از مکعب مستطیل است، ولی در اکثر موارد از آن‌ها استفاده می‌شود. نمایی از حالت مرتبه اول این‌ها را در شکل می‌بینید:



شکل ۳-۳- منشور با مقطع مثلث



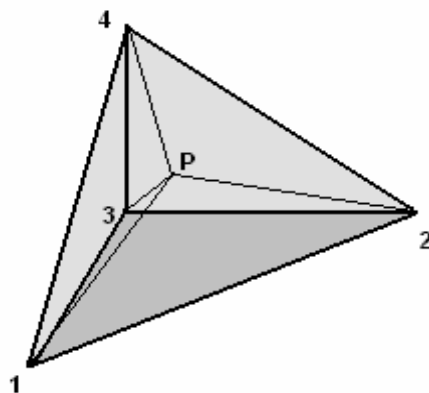
شکل ۳-۲- چهاروجهی



شکل ۳-۱- مکعب مستطیل

در این پایان‌نامه از المان‌های کلی‌تر چهاروجهی استفاده می‌کنم. لازم است ابتدا توابع گسترش آن‌ها را به‌دست آوریم. ایده‌ی کار مطابق حالت ۲- بعدی است. نقطه P را در میان المان انتخاب می‌کنیم و توابع گسترش هر گره، برابر نسبت حجم چهاروجهی ایجاد شده از نقطه P و سطح مقابل آن گره می‌باشد. یعنی:

$$\begin{aligned}
 N_1^e &= \frac{\text{Volume(P234)}}{\text{Volume(1234)}} \\
 N_2^e &= \frac{\text{Volume(P134)}}{\text{Volume(1234)}} \\
 N_3^e &= \frac{\text{Volume(P124)}}{\text{Volume(1234)}} \\
 N_4^e &= \frac{\text{Volume(P123)}}{\text{Volume(1234)}}
 \end{aligned}
 \quad (3.24)$$



شکل ۳-۴ - المان چهاروجهی

روش دیگری که می‌توان این توابع گسترش را به دست آورد، بدین شکل است: فرض می‌کنیم که تابع $\phi^e(x, y, z)$ تابع تقریب‌زده شده در داخل المان باشد. این تابع از چندجمله‌ای مرتبه ۱ انتخاب می‌کنیم:

$$\phi^e(x, y, z) = a^e + b^e x + c^e y + d^e z \quad (3-25)$$

می‌خواهیم این تابع در نقاط گره دارای مقدار دقیق باشد. اگر مختصات گره‌ها را با (x_i, y_i, z_i) نشان دهیم و مقدار مطلوب تابع در گره را با ϕ_i^e ، خواهیم داشت:

$$\phi_1^e = a^e + b^e x_1 + c^e y_1 + d^e z_1 \quad (3-26)$$

$$\phi_2^e = a^e + b^e x_2 + c^e y_2 + d^e z_2 \quad (3-27)$$

$$\phi_3^e = a^e + b^e x_3 + c^e y_3 + d^e z_3 \quad (3-28)$$

$$\phi_4^e = a^e + b^e x_4 + c^e y_4 + d^e z_4 \quad (3-29)$$

با حل این دستگاه، می‌توانیم مقادیر a^e, b^e, c^e, d^e را به دست آوریم:

$$a^e = \frac{1}{6V^e} \begin{vmatrix} \phi_1^e & \phi_2^e & \phi_3^e & \phi_4^e \\ x_1^e & x_2^e & x_3^e & x_4^e \\ y_1^e & y_2^e & y_3^e & y_4^e \\ z_1^e & z_2^e & z_3^e & z_4^e \end{vmatrix} = \frac{1}{6V^e} (a_1^e \phi_1^e + a_2^e \phi_2^e + a_3^e \phi_3^e + a_4^e \phi_4^e) \quad (3-30)$$

به بسطی a^e به a_i^e توجه کنید. از این، در تعریف تابع گسترش استفاده خواهیم کرد.

به همین نحو خواهیم داشت:

$$b^e = \frac{1}{6V^e} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \phi_1^e & \phi_2^e & \phi_3^e & \phi_4^e \\ y_1^e & y_2^e & y_3^e & y_4^e \\ z_1^e & z_2^e & z_3^e & z_4^e \end{vmatrix} = \frac{1}{6V^e} (b_1^e \phi_1^e + b_2^e \phi_2^e + b_3^e \phi_3^e + b_4^e \phi_4^e) \quad (3-31)$$

$$c^e = \frac{1}{6V^e} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1^e & x_2^e & x_3^e & x_4^e \\ \phi_1^e & \phi_2^e & \phi_3^e & \phi_4^e \\ z_1^e & z_2^e & z_3^e & z_4^e \end{vmatrix} = \frac{1}{6V^e} (c_1^e \phi_1^e + c_2^e \phi_2^e + c_3^e \phi_3^e + c_4^e \phi_4^e) \quad (3-32)$$

$$d^e = \frac{1}{6V^e} \begin{vmatrix} \phi_1^e & \phi_2^e & \phi_3^e & \phi_4^e \\ x_1^e & x_2^e & x_3^e & x_4^e \\ y_1^e & y_2^e & y_3^e & y_4^e \\ \phi_1^e & \phi_2^e & \phi_3^e & \phi_4^e \end{vmatrix} = \frac{1}{6V^e} (d_1^e \phi_1^e + d_2^e \phi_2^e + d_3^e \phi_3^e + d_4^e \phi_4^e) \quad (3-33)$$

که در آن‌ها، V^e که در زیر تعریف شده است، حجم المان است^۷:

^۷ چگونگی نوشته شدن ضرایب نشان می‌دهد که V^e در روابط پیشین، حجم علامت‌دار است و می‌تواند مثبت یا منفی باشد.

$$V^e = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1^e & x_2^e & x_3^e & x_4^e \\ y_1^e & y_2^e & y_3^e & y_4^e \\ z_1^e & z_2^e & z_3^e & z_4^e \end{vmatrix} \quad (3-34)$$

حال با نوشتن بسط تقریبی در هر المان مطابق قبل و به شکل زیر:

$$\phi^e(x, y, z) = \sum_{j=1}^4 N_i^e(x, y, z) \phi_j^e \quad (3-35)$$

می‌توانیم توابع گسترش را به دست آوریم:

$$N_i^e(x, y, z) = \frac{1}{6V^e} (a_i^e + b_i^e x + c_i^e y + d_i^e z) \quad (3-36)$$

چون قبل، این تابع دارای خواصی است که می‌تواند باعث ساده‌تر شدن محاسبات ماتریس‌های مان شود:

$$N_i^e(x_j, y_j, z_j) = \delta_{ij} \quad (3-37)$$

که البته در این جا منظور از (x_i, y_j, z_j) مختصات نقاط گره می‌باشد. هم‌چنین:

$$\iiint_V (N_1^e)^k (N_2^e)^l (N_3^e)^m (N_4^e)^n dv = \frac{k!l!m!n!}{(k+l+m+n+3)!} 6V^e \quad (3-38)$$

۳-۶) مدهای ناخواسته

تاکنون فراتابعی برای مساله کلی موج‌مان و المانی برای مش‌بندی فضای‌مان معرفی کردم. می‌توان خردکردن را با استفاده از همین‌ها انجام داد تا مدهای رزونانسی محفظه را به دست آورد. اما با انجام دادن چنین کاری متوجه می‌شویم که نتایج حاصل، مقادیر ویژه‌ای هستند که درست نیستند و با گسترش توزیع میدان متوجه می‌شویم که پاسخ‌ها اصلاً ربطی به مساله‌ی ما ندارند. این سوال مطرح می‌شود که علت این خطا چیست؟

مدهای ناخواسته، مدت‌های طولانی باعث آزار محققان و کسانی که از FEM برای حل مسائل الکترومغناطیسی استفاده می‌کنند شده بود. این مدها، مدهایی هستند که یک پاسخ صحیح فیزیکی برای مساله نیستند اما پاسخی صحیح برای معادله‌ای هستند که سعی در حل آن‌ها می‌کنیم. به زودی در این‌باره توضیح خواهم داد اما لازم است یادآوری کنم که در این پایان‌نامه سعی نخواهم کرد که به طور دقیق و کامل درباره این مدها و منشاءشان بنویسم و تنها اشاره‌ای کلی به آن‌ها -بدون هیچ‌گونه اثبات- خواهم داشت.

معادلات ماکسول در محیط بدون منبع را می‌توان به فرم‌های مختلفی بیان کرد. یکی از شکل‌های بیان آن به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times E \right) - k_0^2 \epsilon_r E = 0 \\ \nabla \cdot (\epsilon_r E) = 0 \\ \text{Various Boundary conditions} \end{cases} \quad (3-39)$$

اولی همان معادله موجی برداری‌ایست که در قبل داشتیم و از روی آن فراتابع‌مان را به دست آوردیم. اما دومی در فراتابع -که حالت ضعیف معادله دیفرانسیل است- وارد نشده است. در حالتی که $k_0 \neq 0$ باشد، رابطه دوم نیز به صورت گسترده ارضا می‌شود اما اگر $k_0 = 0$ ، دیگر چنین چیزی درست نخواهد بود و صفر

بودن دیورژانس دیگر برقرار نخواهد بود. پاسخ صحیح مساله برای $k_0 = 0$ ، حالت $E=H=0$ است ولی چون در فرم ضعیف، رابطه دوم در آن حالت اعمال نمی‌شود پاسخ‌هایی با مقدار ویژه ۰ ولی دارای توضیح میدان غیرصفر خواهیم داشت. تا بدین‌جا مشکلی برای ما به وجود نمی‌آید چون به راحتی می‌توان مقادیر ویژه ۰ را از بقیه مقادیر ویژه (که بزرگ‌تر از ۰ هستند) جدا کرد. اما عملاً دیده شد که چنین چیزی نیست و مقادیر ویژه مدهای ناخواسته، غیرصفرند. دلیل این موضوع نوع المان‌هایی است که استفاده شده است. المان‌های لاگرانژ - که در این پایان‌نامه از آن‌ها استفاده شده است - توانایی مدل کردن صحیح این مدهای ناخواسته (با مقادیر ویژه صفر) را ندارند. نتیجه این‌که به هنگام استفاده از این المان‌ها، مدهایی حاصل می‌شود که برای برقراری رابطه حاصل از خرد کردن فراتابع، مقادیر ویژه‌ی غیرصفری می‌دهند. این مقادیر غیرصفر عموماً در همان اندازه‌های مقادیر ویژه واقعی مساله هستند و این باعث ایجاد مشکل می‌شود [1]، [19]. برای حل این مشکل روش‌های مختلفی وجود دارد. یکی از روش‌ها، استفاده از جمله پنالتی^۸ در فراتابع است تا شرط صفر بودن رابطه دیورژانس برقرار شود [1]، [11]، [15] و [20]. راه حل دیگر، استفاده از المان‌هاییست که توانایی مدل کردن صحیح مدهای ناخواسته را داشته باشند و پاسخ‌هایی با مقادیر ویژه صفر بدهند. این‌گونه به سادگی می‌توان مدهای ناخواسته را مشخص کرد. این راه حل دوم، استفاده از المان‌های وجهی‌ست که مشکل را به خوبی حل می‌کند [15]، [21]، [22]، [23]، [24] و [25]. علاوه بر این‌ها، استفاده از این نوع المان‌ها مزیت‌های بسیار دیگری هم دارد که در این پایان‌نامه کاری به آن نخواهم داشت. با این حال روش جمله پنالتی تا حد خوبی کار می‌کند و باعث می‌شود مدهای ناخواسته دارای مقادیر ویژه‌ای آن‌چنان بزرگ شوند که از محدوده مقادیر ویژه واقعی کامل دور شوند. فرم جدید فراتابع را با در نظر گرفتن این جمله می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$F(E) = \frac{1}{2} \iiint_V \left\{ \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times E) \cdot (\nabla \times E)^* + \frac{s}{\mu_r \epsilon_r^2} (\nabla \cdot (\epsilon_r E)) \cdot (\nabla \cdot (\epsilon_r E))^* - k_0^2 \epsilon_r E \cdot E^* \right\} dv \quad (3-40)$$

⁸ Penalty term

که s در آن میزان تاثیر جمله پنالیتی را مشخص می‌کند. می‌بینید که در این شکل از فراتابع، جمله‌ای برای در نظر گرفتن رابطه دیورژانس در نظر گرفته شده است. در بخش بعدی، عمل خردکردن را بر روی این فراتابع انجام خواهیم داد.

۷-۳ خردکردن

با در اختیار داشتن فراتابع و المان، می‌توان عملیات خردکردن را انجام داد. با یادآوری این که تابع مورد نظر ما^۹، برداری است و این که آن را به وسیله مجموع سه تابع اسکالر تقریب زده‌ایم، می‌توان فراتابع را به شکل زیر نوشت:

$$F(\vec{E}) = F(E_x \hat{a}_x + E_y \hat{a}_y + E_z \hat{a}_z) = \frac{1}{2} \iiint_V \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\mu_r} [\nabla \times (E_x \hat{a}_x + E_y \hat{a}_y + E_z \hat{a}_z) \cdot \nabla \times (E_x \hat{a}_x + E_y \hat{a}_y + E_z \hat{a}_z)^*] \\ & + \frac{s}{\mu_r \epsilon_r^2} \nabla \cdot (\epsilon_r (E_x \hat{a}_x + E_y \hat{a}_y + E_z \hat{a}_z)) \cdot \nabla \cdot (\epsilon_r (E_x \hat{a}_x + E_y \hat{a}_y + E_z \hat{a}_z))^* \\ & - k_0^2 \epsilon_r (E_x \hat{a}_x + E_y \hat{a}_y + E_z \hat{a}_z) \cdot (E_x \hat{a}_x + E_y \hat{a}_y + E_z \hat{a}_z)^* \end{aligned} \right\} dv \quad (3-41)$$

$\nabla \times E$ را بسط می‌دهیم:

$$\nabla \times E = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \hat{a}_x \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \hat{a}_y \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \hat{a}_z \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \quad (3-42)$$

و با جای‌گذاری در رابطه قبل خواهیم داشت:

^۹ تابع پاسخ مساله - یعنی توزیع میدان.

$$F(\vec{E}) = \frac{1}{2} \iiint_V \left\{ \frac{1}{\mu_r} \left[\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{s}{\mu_r} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right)^2 - k_0^2 \epsilon_r (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) \right\} dv \quad (3-43)$$

این فراتابعی ست که می توان آن را خرد کرد.

گفتم که در حل تمام-موج ما از سه مولفه با هم استفاده می کنیم و می نویسیم:

$$\vec{E} = \left(\sum_{e=1}^{N_e} \{N_x^e\}^T \{E_x\} \right) \hat{a}_x + \left(\sum_{e=1}^{N_e} \{N_y^e\}^T \{E_y\} \right) \hat{a}_y + \left(\sum_{e=1}^{N_e} \{N_z^e\}^T \{E_z\} \right) \hat{a}_z \quad (3-44)$$

با دقت به تعریف توابع گسترش درمی یابیم که به دلیل ارتباط آن ها به شکل المان - که طبیعتا تفاوتی بین سه مولفه میدان نمی کند- همه شان یک سان اند. یعنی:

$$\{N^e\} = \{N_x^e\} = \{N_y^e\} = \{N_z^e\} \quad (3-45)$$

پس در گسترش مان به این نکته توجه خواهیم کرد.

چون قبل کل فضای مساله را به تعدادی المان تقسیم می کنیم:

$$F(\vec{E}) = \sum_{e=1}^{N_e} F(\vec{E}^e) \quad (3-46)$$

و مانند قبل می توان اصل ایستایی را برای هر کدام از المان ها به طور مجزا نوشت:

$$\delta F(\vec{E}) = 0 \Leftrightarrow \delta F(\vec{E}^e) = 0 \quad (3-47)$$

دلیل چنین هم‌ارزی‌ای را در فصل پیش به طور مفصل توضیح داده‌ام. برای ایستایی می‌بایست تغییرات فراتابع نسبت به تغییرات بی‌نهایت کوچک هر کدام از درجات آزادی، صفر باشد. در فرمول‌بندی تمام-موج هر درجه آزادی برداری معادل ۳ درجه آزادی اسکالر است و برای اعمال شرط ایستایی می‌بایست نسبت به هر کدام از ۳ مولفه به طور جداگانه این شرط را اعمال کنیم. به عنوان مثال فرض کنید که می‌خواهیم این شرط را برای E_{x_i} بنویسیم. داریم^{۱۰}:

$$\frac{\partial F(\vec{E})}{\partial E_{x_i}} = 0 = \iiint_V \left\{ \frac{1}{\mu_r} \left[\frac{\partial(\{E_x\}^T \{N^e\})}{\partial E_{x_i}} \left(\frac{\partial(\{N^e\}^T \{E_x\})}{\partial z} - \frac{\partial(\{N^e\}^T \{E_z\})}{\partial x} \right) + \frac{\partial(-\{E_x\}^T \{N^e\})}{\partial y} \left(\frac{\partial\{N^e\}^T \{E_y\}}{\partial x} - \frac{\partial\{N^e\}^T \{E_x\}}{\partial y} \right) + \frac{\partial(\{E_x\}^T \{N^e\})}{\partial x} \left[\frac{\partial(\{N^e\}^T \{E_x\})}{\partial x} + \frac{\partial(\{N^e\}^T \{E_y\})}{\partial y} + \frac{\partial(\{N^e\}^T \{E_z\})}{\partial z} \right] \right] - \frac{s}{\mu_r} \frac{\partial(\{E_x\}^T \{N^e\})}{\partial E_{x_i}} \left[\frac{\partial(\{N^e\}^T \{E_x\})}{\partial x} + \frac{\partial(\{N^e\}^T \{E_y\})}{\partial y} + \frac{\partial(\{N^e\}^T \{E_z\})}{\partial z} \right] - k_0^2 \epsilon_r \left[\frac{\partial(\{E_x\}^T \{N^e\})}{\partial E_{x_i}} (\{N^e\}^T \{E_x\}) \right] \right\} dv \quad (3-48)$$

رابطه بالا با این که بسیار پیچیده می‌نماید ولی تنها مشتق‌گیری از فراتابع نسبت به E_{x_i} است که در آن از قاعده زنجیره‌ای استفاده کرده‌ام. در ضمن توجه کنید که جمله‌ی اول فراتابع که در آن E_{x_i} وجود ندارد را

¹⁰ توجه کنید که دامنه انتگرال‌گیری تنها در همان المانی است که E_{x_i} در آن قرار دارد چون در بقیه نقاط، توابع گسترش صفرند.

اصلا وارد نکرده‌ام چون هنگام مشتق‌گیری صفر می‌شد و نشان دادن این باعث پیچیده‌تر نشان دادن رابطه می‌کند. با دقت در رابطه بالا می‌بینیم که حاصل، شامل جملاتی است که در آن، E_x ، E_y و E_z وجود دارد. با مرتب کردن نسبت به آن‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial F(\vec{E})}{\partial E_{x_i}} = \{K_{xx}\}\{E_x\} + \{K_{xy}\}\{E_y\} + \{K_{xz}\}\{E_z\} - k_0^2 \{B_x\}\{E_x\} = 0 \quad (3-49)$$

با ساده‌سازی و مرتب کردن جملات بالا می‌توانیم بنویسیم:

$$\{K_{xx}\}_i = \iiint_V \frac{1}{\mu_r} \left[\frac{\partial N_i^e}{\partial z} \frac{\partial \{N^e\}^T}{\partial z} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial \{N^e\}^T}{\partial y} + s \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial \{N^e\}^T}{\partial x} \right] dv \quad (3-50)$$

$$\{K_{xy}\}_i = \iiint_V \frac{1}{\mu_r} \left[-\frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial \{N^e\}^T}{\partial x} + s \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial \{N^e\}^T}{\partial y} \right] dv \quad (3-51)$$

$$\{K_{xz}\}_i = \iiint_V \frac{1}{\mu_r} \left[-\frac{\partial N_i^e}{\partial z} \frac{\partial \{N^e\}^T}{\partial x} + s \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial \{N^e\}^T}{\partial z} \right] dv \quad (3-52)$$

$$\{B_x\}_i = \iiint_V \epsilon_r N_i^e \{N^e\}^T dv \quad (3-53)$$

اندیس i برای ماتریس‌های حاصل نشان دهنده عناصری از آن ماتریس‌هاست که به علت کنش با جمله E_{x_i} به وجود آمده‌اند. از آنجایی که در حالت عناصر چهاروجهی مرتبه اول، ۴ تابع گسترش داریم، حاصل ماتریسی ستونی 4×1 است. برای به دست آوردن یک عنصر تنها، لازم است این‌ها را گسترش دهیم. خواهیم داشت:

$$\{K_{xx}\}_{ij} = \iiint_V \frac{1}{\mu_r} \left[s \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \frac{\partial N_j^e}{\partial z} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right] dv \quad (3-54)$$

$$\{K_{xy}\}_{ij} = \iiint_V \frac{1}{\mu_r} \left[-\frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + s \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right] dv \quad (3-55)$$

$$\{K_{xz}\}_{ij} = \iiint_V \frac{1}{\mu_r} \left[-\frac{\partial N_i^e}{\partial z} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + s \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial z} \right] dv \quad (3-56)$$

$$\{B_x\}_{ij} = \iiint_V \epsilon_r N_i^e \cdot N_j^e \cdot dv \quad (3-57)$$

و برای بقیه نیز داریم:

$$\{K_{yy}\}_{ij} = \iiint_V \frac{1}{\mu_r} \left[\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + s \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} + \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \frac{\partial N_j^e}{\partial z} \right] dv \quad (3-58)$$

$$\{K_{zz}\}_{ij} = \iiint_V \frac{1}{\mu_r} \left[\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} + s \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \frac{\partial N_j^e}{\partial z} \right] dv \quad (3-59)$$

$$\{K_{pq}\}_{ij} = \iiint_V \frac{1}{\mu_r} \left[-\frac{\partial N_i^e}{\partial q} \frac{\partial N_j^e}{\partial p} + s \frac{\partial N_i^e}{\partial p} \frac{\partial N_j^e}{\partial q} \right] dv \quad (p \neq q) \quad (3-60)$$

تا بدین جای کار نوع تابع گسترش (مرتبه چندجمله‌ای آن) اهمیتی ندارد. اما هنگام محاسبه این انتگرال‌ها می‌بایست فرم دقیق آن را بدانیم. روش کلی محاسبه این گونه انتگرال‌ها -همان طور که قبلاً ذکر کردم- استفاده از روش‌های انتگرال‌گیری عددی‌ای مانند گاوس-لژاندر^{۱۱} است. اما در بعضی موارد می‌توان این‌ها را به صورت آنالیتیک هم محاسبه کرد و یکی از این موارد همین نوع توابع گسترشی است که فرض کرده‌ایم. فرم بیان تابع گسترش در این حالت چندجمله‌ای مرتبه اول به شکل زیر است:

$$N_i^e(x, y, z) = \frac{1}{6V^e} (a_i^e + b_i^e x + c_i^e y + d_i^e z) \quad (3-61)$$

¹¹ Gauss-Legendre

پس انتگرال‌های زیر به سادگی قابل محاسبه‌اند^{۱۲}:

$$\iiint_{V^e} \frac{\partial N_i^e}{\partial p} \frac{\partial N_j^e}{\partial q} dv = \frac{\{p_i^e\} \{q_j^e\}}{36V^e} \quad (3-62)$$

که در آن $\{p_i^e\}$ (و $\{q_i^e\}$) به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\begin{cases} p = x \rightarrow \{p_i^e\} = b_i^e \\ p = y \rightarrow \{p_i^e\} = c_i^e \\ p = z \rightarrow \{p_i^e\} = d_i^e \end{cases} \quad (3-63)$$

و به همین ترتیب^{۱۳}:

$$\iiint_V N_i^e N_j^e .dv = \begin{cases} \frac{V^e}{20} & i \neq j \\ \frac{V^e}{10} & i = j \end{cases} \quad (3-64)$$

که این، از همان رابطه‌ای به دست آمده است که در بخش معرفی المان‌های ۳-بعدی معرفی کردم. با جای‌گذاری در انتگرال‌ها، می‌توان آن‌ها را محاسبه کرد. با انجام این کار و هم‌چنین به دست آوردن بقیه ماتریس‌هایی که حاصل از E_{x_i} هستند- روابط زیر را خواهیم داشت:

$$\{K_{xx}^e\}_{ij} = \frac{1}{36V^e} \frac{1}{\mu_r} [s.b_i b_j + c_i c_j + d_i d_j] \quad (3-65)$$

¹² در اینجا حجم المان، مثبت است چون از ضرب دو عدد هم علامت ناشی شده است.
¹³ در اینجا نیز درست به همان دلیل، علامت حجم مثبت است.

$$\{K_{yy}^e\}_{ij} = \frac{1}{36V^e} \frac{1}{\mu_r} [b_i b_j + s.c_i c_j + d_i d_j] \quad (3-66)$$

$$\{K_{zz}^e\}_{ij} = \frac{1}{36V^e} \frac{1}{\mu_r} [b_i b_j + c_i c_j + s.d_i d_j] \quad (3-67)$$

$$\{K_{pq}^e\}_{ij} = \frac{1}{36V^e} \frac{1}{\mu_r} [-\{q_i^e\}\{p_j^e\} + s\{p_i^e\}\{q_j^e\}] \quad (p \neq q) \quad (3-68)$$

$$\{B_x\}_{ij} = \{B_y\}_{ij} = \{B_z\}_{ij} = \frac{\varepsilon_r}{20} (1 + \delta_{ij}) \quad (3-69)$$

در نهایت با داشتن این‌ها، می‌توان برای هر المان نوشت:

$$\begin{bmatrix} \{K_{xx}^e\} & \{K_{xy}^e\} & \{K_{xz}^e\} \\ \{K_{yx}^e\} & \{K_{yy}^e\} & \{K_{yz}^e\} \\ \{K_{zx}^e\} & \{K_{zy}^e\} & \{K_{zz}^e\} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \{E_x^e\} \\ \{E_y^e\} \\ \{E_z^e\} \end{bmatrix} = k_0^2 \begin{bmatrix} \{B_x^e\} & 0 & 0 \\ 0 & \{B_y^e\} & 0 \\ 0 & 0 & \{B_z^e\} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \{E_x^e\} \\ \{E_y^e\} \\ \{E_z^e\} \end{bmatrix} \quad (3-70)$$

حال با دانستن ماتریس مختص به هر المان می‌توان ماتریس کلی را با فرآیند جمع‌آوری به دست آورد. این کار درست مانند حالت ۱-بعدی است منتهی با این تفاوت که باید به گونه‌ای سه مولفه مختلف بردار را از هم جدا کنیم تا ماتریس نهایی حاصل به شکل زیر باشد:

$$\begin{bmatrix} \{K_{xx}\} & \{K_{xy}\} & \{K_{xz}\} \\ \{K_{yx}\} & \{K_{yy}\} & \{K_{yz}\} \\ \{K_{zx}\} & \{K_{zy}\} & \{K_{zz}\} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \{E_x\} \\ \{E_y\} \\ \{E_z\} \end{bmatrix} = k_0^2 \begin{bmatrix} \{B_x\} & 0 & 0 \\ 0 & \{B_y\} & 0 \\ 0 & 0 & \{B_z\} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \{E_x\} \\ \{E_y\} \\ \{E_z\} \end{bmatrix} \quad (3-71)$$

چنین کاری مستلزم این است که در هنگام جمع‌آوری ماتریس‌های محلی در ماتریس عمومی، به این که هر کدام از ضرایب بر کدام مولفه تاثیر می‌گذارند، توجه کرد.

۳-۸) اعمال شرایط مرزی

مرحله نهایی برای آماده کردن ماتریس‌ها در FEM، اعمال شرایط مرزی است که در محفظه رزونانسی فلزی شرط مرزی از نوع دیرپچله همگن می‌باشد. دیدیم که این شرط از نوع ضروری است و باید به صورت جداگانه‌ای اعمال شود. در فصل پیش چگونگی اعمال این نوع شرط مرزی را بیان کردم. اما با دقت در شرط مرزی PEC که در مساله ۳-بعدی مطرح می‌شود با آن‌گونه‌ای از آن که در فصل قبل دیدید، متوجه تفاوت ساختاری این دو می‌شود. در حالت ۱-بعدی و ۲-بعدی یکی از مولفه‌ها به طور مشخص ۰ می‌شد ولی در این‌جا دیگر چنین چیزی صحت ندارد، بلکه مولفه موازی سطح میدان صفر می‌شود. پس دیگر نمی‌توان به راحتی مانند آن‌چه دیدیم، شرط مرزی دیرپچله همگن را اعمال کرد. در این حالت به جای صفر شدن، رابطه‌ای مشخص بین مولفه‌های میدان وجود دارد. اگر فرض کنیم که $\hat{n} (= n_x \hat{a}_x + n_y \hat{a}_y + n_z \hat{a}_z)$ بردار عمود بر سطح در نقطه‌ای باشد، داریم:

$$\hat{n} \times E = 0 \Rightarrow \hat{a}_x (n_y E_z - n_z E_y) + \hat{a}_y (n_z E_x - n_x E_z) + \hat{a}_z (n_x E_y - n_y E_x) = 0 \quad (3-72)$$

اگر فرض کنیم یکی از این مولفه‌های عمود بر سطح -مثلاً n_z - صفر نباشد، دو میدان E_x و E_y به صورت زیر با E_z در آن نقطه ارتباط دارند^{۱۴}:

$$E_x = \frac{n_x}{n_z} E_z \quad (3-73)$$

$$E_y = \frac{n_y}{n_z} E_z \quad (3-74)$$

پس اگر بتوانیم به نحوی این ارتباط را در ماتریس‌مان وارد کنیم، این شرط مرزی اعمال می‌شود.

^{۱۴} اگر n_z صفر باشد -که امری معمول است- می‌توان مولفه‌ای دیگر را انتخاب کرد. به هر حال حداقل یکی از ۳ مولفه غیر صفرند.

برای این کار از روش روش عنصر قطری غالب که در فصل پیش معرفی‌اش کردم استفاده می‌کنم: فرض کنید در گره m می‌خواهیم این شرط مرزی را اعمال کنیم. در آن گره، بردار عمود بر سطح $\hat{n}$ را داریم^{۱۵} و فرض می‌کنیم همان‌طور که گفتیم n_z صفر نباشد. پس می‌خواهیم این دو رابطه برقرار باشند:

$$E_{x_m} - \frac{n_x}{n_z} E_{z_m} = 0 \quad (3-75)$$

$$E_{y_m} - \frac{n_y}{n_z} E_{z_m} = 0 \quad (3-76)$$

سطر m ام مولفه X و Y به صورت زیر است^{۱۶}:

$$K_{xx_{m1}} E_{x1} + K_{xx_{m2}} E_{x2} + \dots + K_{xy_{m1}} E_{y1} + K_{xy_{m2}} E_{y2} + \dots + K_{xz_{m1}} E_{z1} + K_{xz_{m2}} E_{z1} = k_0^2(\dots) \quad (3-77)$$

$$K_{yx_{m1}} E_{x1} + K_{yx_{m2}} E_{x2} + \dots + K_{yy_{m1}} E_{y1} + K_{yy_{m2}} E_{y2} + \dots + K_{yz_{m1}} E_{z1} + K_{yz_{m2}} E_{z1} = k_0^2(\dots) \quad (3-78)$$

اگر بخواهیم رابطه بالا صادق باشد، می‌توان مانند روش عنصر قطری غالب در یک عدد بزرگ ضرب کرد تا تاثیر بقیه جملات کم شود:

$$\dots + \alpha E_{xm} + \dots + \alpha \left(-\frac{n_x}{n_z} \right) E_{zm} + \dots = k_0^2(\dots) \quad (3-79)$$

$$\dots + \alpha E_{ym} + \dots + \alpha \left(-\frac{n_y}{n_z} \right) E_{zm} + \dots = k_0^2(\dots) \quad (3-80)$$

توجه کنید که در طرف دوم تساوی تغییر انجام نداده‌ام.

^{۱۵} در مورد چگونگی محاسبه این به زودی توضیح خواهم داد.

^{۱۶} در اینجا فرض کرده‌ام که سطر m ام مربوط در بخش E_x و ... ماتریس است و نه کل ماتریس.

درست مشابه تحلیلی که در فصل قبل انجام دادم، با فرض این که بقیه جملات نسبت به α چندان بزرگ نباشند، می توان نوشت:

$$\alpha E_{xm} + \alpha \left(-\frac{n_x}{n_z} \right) E_{zm} + \delta_1 = \delta_2 \Rightarrow E_{xm} = \frac{\delta_1 - \delta_2}{\alpha} + \frac{n_x}{n_z} E_{zm} \approx \frac{n_x}{n_z} E_{zm} \quad (3-81)$$

$$\alpha E_{ym} + \alpha \left(-\frac{n_y}{n_z} \right) E_{zm} + \delta_1 = \delta_2 \Rightarrow E_{ym} = \frac{\delta_1 - \delta_2}{\alpha} + \frac{n_y}{n_z} E_{zm} \approx \frac{n_y}{n_z} E_{zm} \quad (3-82)$$

که همان رابطه ایست که می خواستیم. تنها نکته ای که در اعمال شرط مرزی باقی مانده است، چگونگی تعریف بردار عمود بر سطح است. برای بعضی از شکل های هندسی مانند مکعب مستطیل، استوانه، کره، بیضی گون و ... بردار عمود بر سطح به صورت آنالیتیک قابل محاسبه است^{۱۷}. پس بردار عمود بر سطح را بدین شکل می توان تعیین کرد. اما در حالت کلی از آن جا که بردار عمود بر سطح در یک نقطه (گره) تعریف نشده است، می توان برآیند بردارهای سطوح المان هایی را که آن گره بین شان مشترک است به عنوان بردار عمود بر سطح آن نقطه تعریف کرد [۱۱].

در این فصل، اصول ریاضی FEM برای حالت ۳-بعدی و مخصوصا برای حالت خاص محفظه فلزی را به دست آوردم. در فصل بعد، درباره جزییات پیاده سازی این روش و نتایج شبیه سازی ها خواهم نوشت.

^{۱۷} گرچه در این حالات نیز مشکلاتی وجود دارد. به عنوان مثال لبه ها و کنج ها در مکعب مستطیل.

"To err is human, but to really screw things up requires a computer."

-Murphy Law

فصل چهارم

پیاده‌سازی روش اجزاء محدود و نتایج آزمایش‌ها

۴-۱) مقدمه

اکنون، نتایج نهایی تمام بحث‌ها و فرمول‌بندی‌های این پایان‌نامه را با ذکر چند مثال بیان می‌کنم. هدف از این پایان‌نامه رسیدن به روشی برای به دست آوردن مدهای رزونانسی محفظه‌ای فلزی با استفاده از FEM بوده است. برای این کار می‌بایست تئوری ریاضی‌ای برای حل معادله موج در حالت کلی داشته باشیم که تمام پایان‌نامه تا بدین‌جا به این منظور اختصاص یافته بود. این فرمول‌بندی تا حد ممکن می‌بایست شفاف و دقیق باشد تا به راحتی قابل پیاده‌سازی توسط کامپیوتر باشد. به همین دلیل در این پایان‌نامه سعی شد همه مراحل میانی کار و همچنین نتایج نهایی (مثلاً انتگرال‌ها) به گونه‌ای باشد که برای پیاده‌سازی نرم‌افزاری آن کار چندانی لازم نباشد. طبیعی است که اگر قرار بر رعایت اختصار می‌بود، به راحتی می‌شد تمام ایده‌ی این پایان‌نامه را در یک دهم همین حجم بیان کرد.

به هر حال برای پیاده‌سازی FEM برای چنین دسته مسایلی، زبان برنامه‌نویسی C++ انتخاب شد و همچنین نرم‌افزار محاسباتی MatLab نیز برای محاسبه مقادیر ویژه به کار رفت. دلیل انتخاب C++، قابلیت¹ OO آن است که با نحوه‌ای که به مراحل FEM نگاه می‌کردیم سازگار است. به عنوان مثال بخش مربوط به تولید مش از بخش تولید کننده‌های ماتریس جذاست ولی به دلیل سازگاری‌ای که آن دو بخش دارند به راحتی می‌توانند داده‌هایی خود را با هم مبادله کنند. اضافه کردن یک ساختار جدید تولید مش (الگوریتم‌های دیگر یا ...) -به شرط رعایت چارچوب OO مشخص شده- هیچ تغییری در بقیه بخش‌ها ایجاد نمی‌کند. یا مثلاً عوض کردن نوع المان (مثلاً از چهاروجهی به مکعب مستطیل) تنها مستلزم تغییر

¹ Object Oriented

بخش‌های محاسبه ماتریس‌های محلی است.^۲ این برنامه تا حد ممکن قابل حمل^۳ نوشته شده است و به دلیل عدم استفاده از ویژگی‌های خاص OS^۴ می‌بایست در اکثر سکوها متداول با تغییر اندکی قابل اجرا باشد.^۵ علاوه بر این، برای رسم اشکال ۳-بعدی مش‌بندی نیز از نرم‌افزار Mathematica استفاده شده است [26].

کامپایلر این نرم‌افزار Microsoft Visual C++ 6.0 بوده است که سیستم عامل Microsoft Windows XP بر روی آن اجرا می‌شده است. نرم‌افزار حل ماتریس نهایی (پس از فرآیند جمع‌آوری و اعمال شرایط مرزی)، The Mathworks MatLab 5.3 انتخاب شد. با وجود این‌که در این پایان‌نامه اطلاعات زمانی (سرعت اجرا) نوشته نخواهد شد، با این‌حال مشخصات کامپیوتری که محاسبات روی آن انجام گرفته است بدین نحو است: کامپیوتر PC با پردازنده intel Pentium IV 1.6GHz و دارای 256MB RAM و دارای ظرفیت دیسک سخت به اندازه کافی.^۶ پس به طور خلاصه ویژگی‌های این نرم‌افزار و سیستمی که روی آن پیاده‌سازی شده است به صورت زیر است:

نرم‌افزار تشکیل‌دهنده ماتریس‌ها	Microsoft Visual C++ 6.0
حل‌کننده ماتریس‌ها	The Matworks MatLab 5.3
نمایش‌دهنده مش‌بندی	Mathematica 4.0
سیستم‌عامل	Microsoft Windows XP
پردازنده	Intel Pentium IV 1.6GHz
حافظه	256 MB

جدول ۴-۱ - مشخصات نرم‌افزار و سیستم

^۲ با این‌وجود این به آن معنا نیست که تغییرات لازم تنها به یک بخش اعمال می‌شود و چنین کاری اصولاً ساده است. درست مانند هر طراحی نرم‌افزاری دیگر، می‌بایست اعتدالی بین پیچیدگی اولیه ناشی از قابلیت گسترش ساده آتی (بهتر شدن ایده‌های OO) و سادگی طراحی اولیه بدون قابلیت گسترش برگزید. برخلاف باور عموم، طراحی OO معادل بهتر بودن نیست و انتخاب میزان نزدیک شدن به چنین رویکردی کاملاً به مساله باز می‌گردد. با این همه، این برنامه به میزان خوبی به صورت OO طراحی شده است.

^۳ Portable

^۴ Operating system

^۵ گرچه این موضوع تست نشده است.

^۶ ذکر میزان حافظه برای این مهم است چون عملاً دیده شد که اگر دقت مش‌بندی کمی بالا باشد، حافظه سیستم به راحتی پر می‌شود و OS بناچار از Virtual Memory استفاده می‌کند که به شدت سرعت پردازش را کم می‌کند به طوری که میزان اشغال و دن CPU از حدود -95% 100% به 20%-10% می‌رسید که نشان از فعالیت مفید نداشتن پردازشگر است.

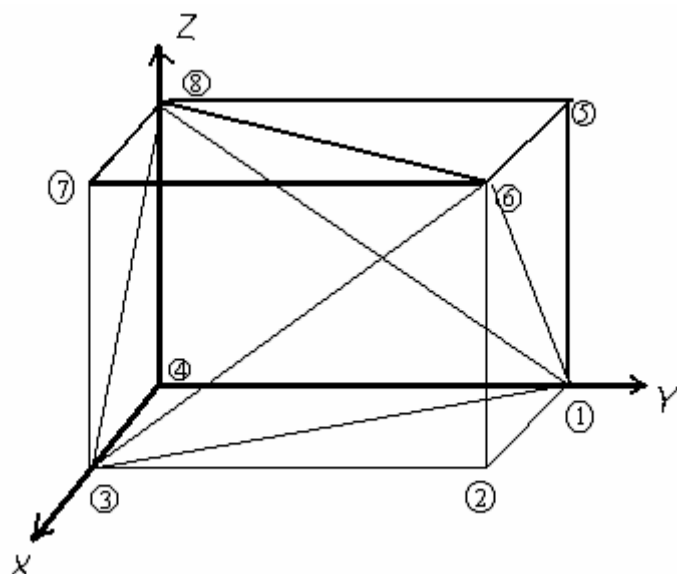
الگوریتم کلی نرم افزار به صورت زیر است:

۱. تولید مش برای جسم مورد نظر و تنظیم پارامترهای آن.
۲. محاسبه بردارهای عمود بر سطح در گره ها
۳. محاسبه ماتریس های محلی K و جمع آوری همه آنها در ماتریس عمومی K
۴. محاسبه ماتریس های محلی B و جمع آوری همه آنها در ماتریس عمومی B
۵. اعمال شرط مرزی دیرچله همگن در ماتریس K
۶. ذخیره ماتریس ها برای انتقال به نرم افزار MatLab برای حل مساله مقادیر ویژه
۷. محاسبه مقادیر ویژه با استفاده از MatLab به روش تکراری و حذف پاسخ های غیر فیزیکی و مرتب کردن لیست خروجی

در قسمت های بعد، چندین مثال از اجسام مختلف و نتایج حاصل خواهیم آورد.

۴-۲) فرکانس های رزونانس مکعب مستطیل فلزی

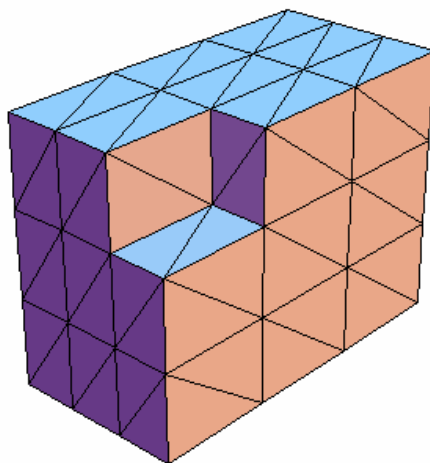
به عنوان اولین مثال، فرکانس های رزونانس مکعب مستطیل فلزی ای را به دست می آورم. با این که حل این مساله به روش آنالیتیک بسیار ساده است ولی حل آن به روش عددی تفاوت بنیادی با دیگر ساختارها نمی کند و می تواند به عنوان نمونه ای مناسب برای آزمایش درستی روش عددی باشد. در ضمن ویژگی مهم اش ساده بودن نسب مش بندی آن است که به عنوان اولین تست این روش عددی انتخاب مناسبی به شمار می رفت. با این حال، مشکلی که در این حالت وجود دارد تعریف نشدن بردار عمود بر سطح بر لبه ها و کنج هاست. در لبه ها ما ۳ بردار عمود بر سطح عمود بر هم می توانیم تعریف کنیم و در کنج ها نیز ۳ بردار عمود به سطح دو به دو متعامد. ابتدا تصور می شد در نظر نگرفتن این ها (و یا به عبارت دقیق تر، در نظر گرفتن بردار برآیند آن ۲ یا ۳ بردار) تاثیر چندانی در جواب نخواهد داشت ولی با آزمایش چنین چیزی



Tetrahedral	Nodes
1	(1,2,3,6)
2	(1,4,3,8)
3	(8,5,6,1)
4	(8,7,6,3)
5	(6,3,1,9)

شکل ۴-۱- تقسیم مکعب مستطیل به ۵ tetrahedral

مشخص شد که آن فرضیه درست نیست. به همین منظور، در آن نقاط بیش از یک بردار عمود بر سطح تعریف می‌شود و شرط صفر بودن میدان مماسی، در ۲ (یا ۳) صفحه توأمان با هم ارضا می‌شود.



شکل ۴-۲- نمونه‌ای از مش مکعب مستطیلی

برای مش‌بندی مکعب مستطیل، می‌توان آن را به تعدادی مکعب مستطیل کوچک‌تر تقسیم کرد و از آن‌جایی که هر مکعب مستطیل به وسیله چندین چهاروجهی پر می‌شود، می‌توان کل جسم را به تعدادی المان چهاروجهی تقسیم کرد. هر چقدر زیر مکعب مستطیل‌ها نسبت به جسم اصلی کوچک‌تر باشند، دقت

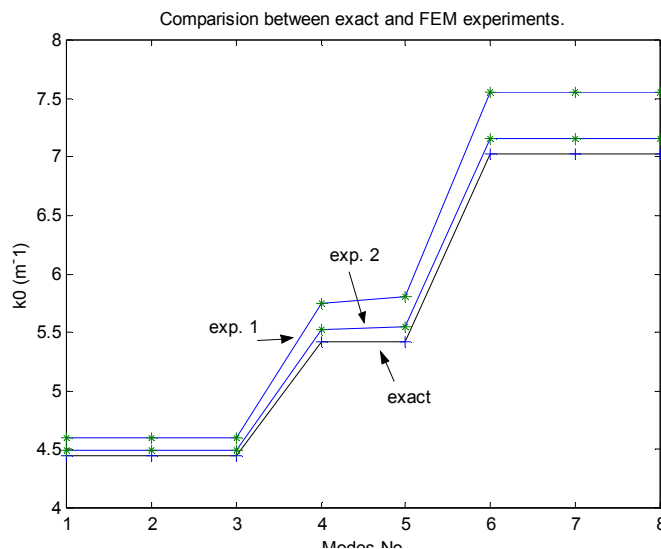
محاسبه بالاتر می‌رود. روش‌های مختلفی برای پر کردن معکب مستطیل به وسیله چهاروجهی وجود دارد که من در اینجا از روشی استفاده کرده‌ام که آن را به وسیله ۵ المان چهاروجهی پر می‌کند. نحوه پر کردن یک معکب مستطیل در شکل نشان داده شده است. به دلیل این که ممکن است پیدا کردن ۵ المان ذکر شده در شکل مشکل باشد، شماره رئوس هر کدام از المان‌ها نیز نوشته شده است. علاوه بر آن، نمایی از یک مش معکب مستطیلی که بخشی از آن بریده شده است را نیز در شکل می‌بینید:

اولین آزمایش، محاسبه عدد موج مکعبی $1 \times 1 \times 1$ است. نتایج حاصل از دو آزمایش مختلف با پاسخ‌های دقیق مقایسه شده‌اند.^۷

Mode No.	Exact	Experiment 1 N = 625	Experiment 2 N = 1331
TE_{101}	4.442	4.598 (3.5%)	4.490 (1.08%)
TE_{011}	4.442	4.598 (3.5%)	4.490 (1.08%)
TM_{110}	4.442	4.598 (3.5%)	4.490 (1.08%)
TE_{111}	5.420	5.751 (6.1%)	5.526 (1.95%)
TM_{111}	5.420	5.801 (7.03%)	5.545 (2.3%)
TE_{102}	7.025	7.556 (7.5%)	7.159 (1.9%)
TE_{201}	7.025	7.556 (7.5%)	7.159 (1.9%)
TE_{021}	7.025	7.556 (7.5%)	7.159 (1.9%)

جدول ۴-۲- مدهای مکعب $1 \times 1 \times 1$

^۷ همه مقادیر دقیق در این فصل، نتایج پاسخ‌های آنالیتیکی هستند که از [27] برگرفته شده‌اند.



شکل ۴-۳- مقایسه مدهای مکعب 1x1x1

عددی N که در هر آزمایش نوشته شده است، تعداد گره‌هایی است که در شبیه‌سازی به کار رفته‌اند. هر کدام از گره‌ها، دارای ۳ درجه آزادی هستند که آن‌هایی که بر روی سطح هستند، مقدار از پیش مشخصی دارند. با این وجود هیچ تلاشی برای حذف آن‌ها نشده است و در ماتریس حفظ شده‌اند. اطلاعات بیش‌تر آزمایش در جدول انتها بخش می‌بینید. می‌بینیم که پاسخ‌ها دارای دقت قابل قبولی هستند. در ضمن مدهای تکراری^۸ نیز به خوبی مدل شده‌اند و این با توجه به این‌که چنین مدهایی باعث نزدیک کردن ماتریس به حالت تکی^۹ می‌شوند، قابل قبول است.

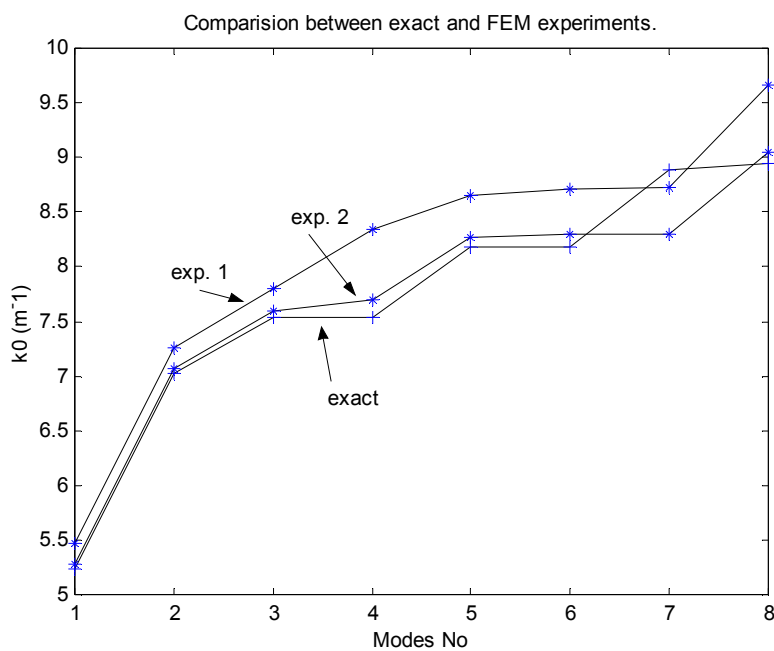
آزمایش بعدی روی مکعب مستطیلی با ابعاد $1 \times 0.5 \times 0.75$ می‌باشد. نتایج بدین صورت‌اند:

^۸ Degenerate

^۹ Singular

Mode No.	Exact	Experiment 1 N = 625	Experiment 2 N = 1331
TE_{101}	5.236	5.470 (4.4%)	5.276 (0.76%)
TM_{110}	7.025	7.265 (3.4%)	7.067 (0.59%)
TE_{011}	7.531	7.798 (3.5%)	7.596 (0.86%)
TE_{201}	7.531	8.35 (10.8%)	7.702 (2.27%)
TM_{111}	8.179	8.654 (5.8%)	8.275 (1.17%)
TE_{111}	8.179	8.713 (6.5%)	8.299 (1.46%)
TM_{210}	8.886	8.718 (-1.8%)	8.302 (-6.5%)
TE_{102}	8.947	9.669 (8%)	9.048 (1.13%)

جدول ۴-۳- مدهای مکعب مستطیل 1x0.5x0.75



شکل ۴-۴- مقایسه مدها برای مکعب مستطیل 1x0.5x0.75

مش‌بندی این دو آزمایش درست مثل هم بودند. اطلاعات دقیق از جمله تعداد المان‌ها و ... را در جدول می‌بینید.

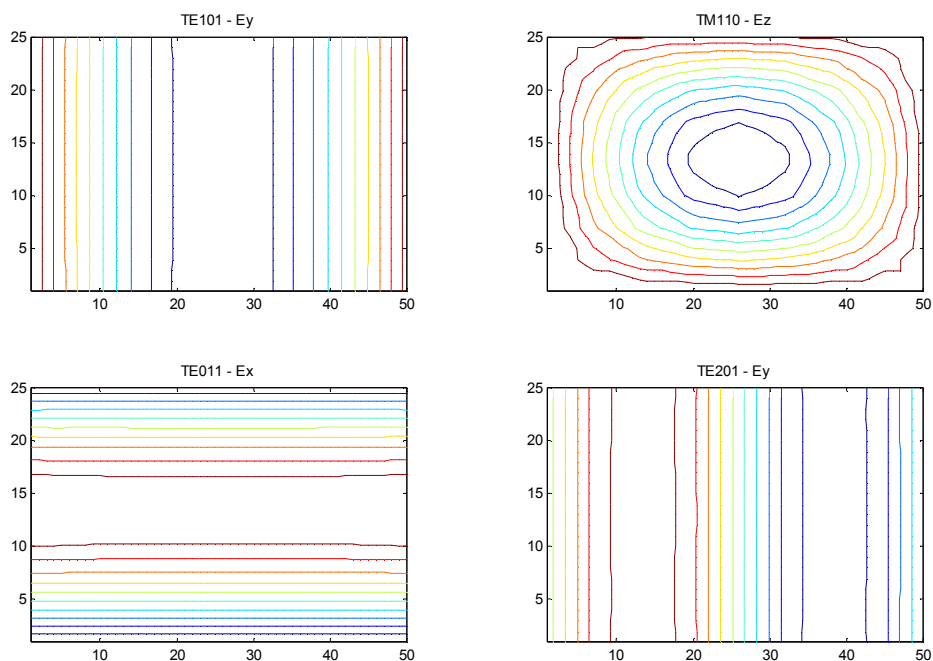
آزمایش ۲	آزمایش ۱	
1331	216	تعداد گره‌ها
5000	625	تعداد المان‌ها
3993x3993	648x648	ابعاد ماتریس
1	1	ضریب پنالتی
10x10x10	5x5x5	تعداد زیرمکعب‌ها

جدول ۴-۴- شرایط آزمایش

نتایج هر دو آزمایش قابل قبول بود - مخصوصا اگر تعداد گره‌ها زیاد باشد. یکی از مهم‌ترین مسایلی که در فرمول‌بندی حاضر می‌بینیم، تعیین ضریب پنالتی برای اعمال شرط دیورژانس به منظور جلوگیری از مدهای اضافی است. در این سلسله آزمایش‌ها تلاشی منظم و هدفمند برای به دست آوردن پارامترهای مناسب انجام ندادم اما مشاهده کردم که تغییر این پارامتر می‌تواند بسیار تاثیرگذار باشد. به این معنا که به صرف وجود چنین پارامتر، الزاما مدهای ناخواسته از بین نمی‌رود بلکه کم‌تر می‌شود. اگر این مقدار را زیاد انتخاب کنیم (مثلا $s=5$) می‌توانیم تقریبا مطمئن باشیم که مد ناخواسته‌ای نداریم ولی در عوض دقت پاسخ‌های مان را از بین برده‌ایم. در چنان حالتی، در اصل، فراتابع ما در نقطه‌ای ایستا می‌شود که دیورژانس صفر باشد و جملات اصلی خود مساله (جمله curl و توان ۲) عملا نقش پنالتی را برای آن دیگری بازی می‌کنند! اگر ضریب را کم کنیم، دقت بسیار مناسب می‌شود به طوری که حتی با مشی در اندازه‌های آزمایش اول، می‌توان به دقت‌های در حدود آزمایش دوم رسید^{۱۰} ولی در عوض تعدادی پاسخ ناخواسته نیز ایجاد می‌شود که مقدارشان در حد و اندازه‌ی مدهای خود مساله است. با این وجود به نظر می‌رسد اگر مساله را در دو حالت حل کنیم می‌توانیم به دقت‌های بالایی دست یابیم. یکی با مقدار پنالتی نسبتا بالاست (۱ یا ۲ - گرچه بنا به مساله فرق دارد) تا به کمک آن، حدود پاسخ‌ها را به دست بیاوریم و دیگری با پنالتی پایین است (۰,۳ -

^{۱۰} رچه همان‌طور که گفتم بررسی سیستماتیکی روی این موضوع انجام ندادم.

۰,۱) تا دقت را بالا ببریم. در آزمایش‌ها مشاهده کردم که تفاوت مدهای ناخواسته و اصلی معمولاً آن‌قدر هست که بتوان تشخیص داد. با این حال چنین کاری نیاز به بررسی بیشتر دارد. تعدادی از توزیع میدان‌ها را برای آزمایش دوم در شکل می‌بینید.



شکل ۴-۵- نمونه‌ای از توزیع میدان برای مکعب مستطیل $1 \times 0.5 \times 0.75$

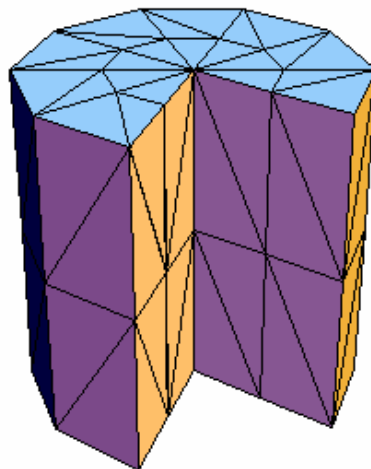
۴-۳) فرکانس‌های رزونانس استوانه فلزی

به عنوان دومین آزمایش، فرکانس‌های رزونانس استوانه فلزی با مقطع دایروی را محاسبه به دست می‌آوریم. در مورد مش‌بندی، بهترین روش مراجعه به سورس برنامه است. اما با این حال توضیح مختصری در این‌جا داده می‌شود.

برای مش‌بندی استوانه، در دو مرحله عمل می‌کنیم. مرحله اول برای تشکیل یک لایه از چهاروجهی از مرکز تا Δr و مرحله دوم برای تشکیل بقیه لایه‌ها از Δr تا r - شعاع استوانه. فرض کنید استوانه را به لایه‌های

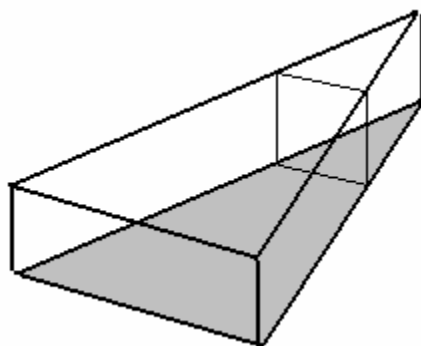
طولی Δh تقسیم کرده باشیم. هر کدام از این لایه‌های طولی می‌بایست به تعدادی لایه شعاعی تقسیم شوند که هر کدام به تعدادی قطاع^{۱۱} دایره تقسیم شده‌اند. پس ما سه درجه تقسیم‌بندی داریم: طولی، شعاعی و زاویه‌ای.

تقسیم‌بندی طولی عملاً مشکلی ندارد. کافی است روالی برای تقسیم‌بندی شعاعی و زاویه‌ای داشته باشیم. برای تقسیم‌بندی زاویه‌ای، استوانه را به تعدادی قطاع تقسیم می‌کنیم. این در شکل دیده می‌شود. برای تقسیم لایه‌ی اول، آن را به سه چهاروجهی مطابق شکل تقسیم می‌کنیم. پس از آن، می‌بایست تعدادی مکعب مستطیل تغییر شکل یافته را مش‌بندی بکنیم که این درست مانند حالت مکعب مستطیل معمول بود. برای اطلاعات بیشتر به سورس برنامه مراجعه کنید.

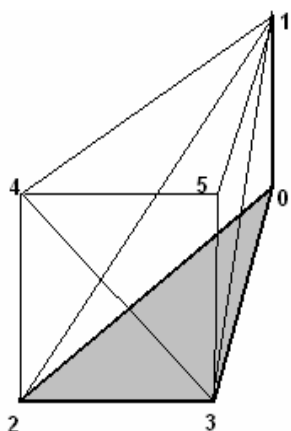


شکل ۴-۸ نمونه مش‌بندی استوانه

^{۱۱} sector



شکل ۴-۶- قطاع استوانه



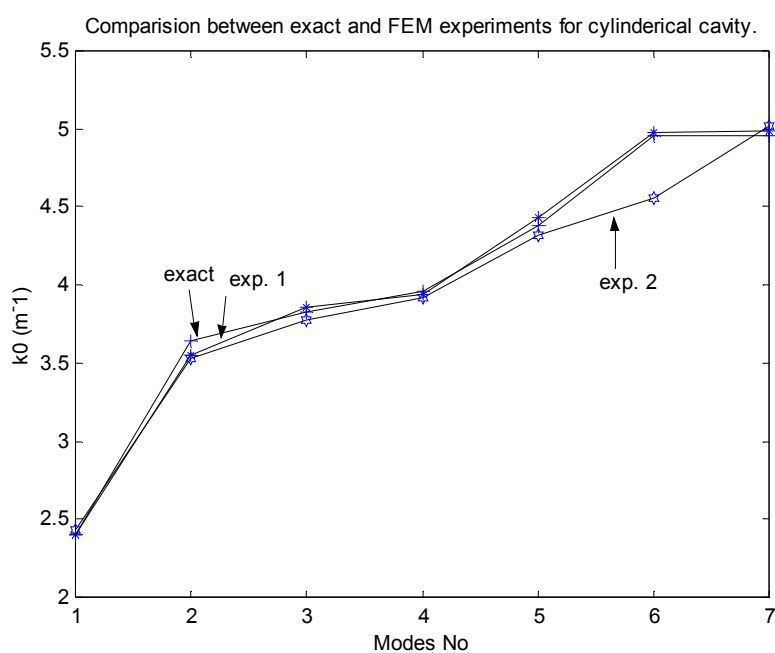
Tetrahedral	Nodes
1	(0,1,2,3)
2	(1,2,3,4)
3	(1,4,3,5)

شکل ۴-۷- تقسیم لایه اول قطاع به ۳ tetrahedral

با تولید مش با دقت‌های مختلف، پاسخ‌های FEM را با جواب‌های آنالیتیک مقایسه می‌کنیم. نتایج دو مش‌بندی مختلف برای استوانه‌ای به ارتفاع ۱ و شعاع ۱ در زیر می‌آید:

Mode No.	Exact	Experiment 1 N = 846	Experiment 2 N = 1661
TM_{010}	2.405	2.399 (-0.25%)	2.434 (1.2%)
TE_{111}	3.641	3.552 (-2.44%)	3.527 (-3.13%)
TM_{110}	3.831	3.860 (0.76%)	3.772 (-1.54%)
TM_{011}	3.956	3.944 (-0.303%)	3.922 (-0.86%)
TE_{211}	4.382	4.436 (1.23%)	4.323 (-1.35%)
TM_{111}	4.954	4.98 (0.5%)	4.551 (-8.13%)
TE_{011}	4.954	4.99 (0.7%)	5.017 (1.27%)

جدول ۴-۵- مدهای استوانه با شعاع و ارتفاع ۱



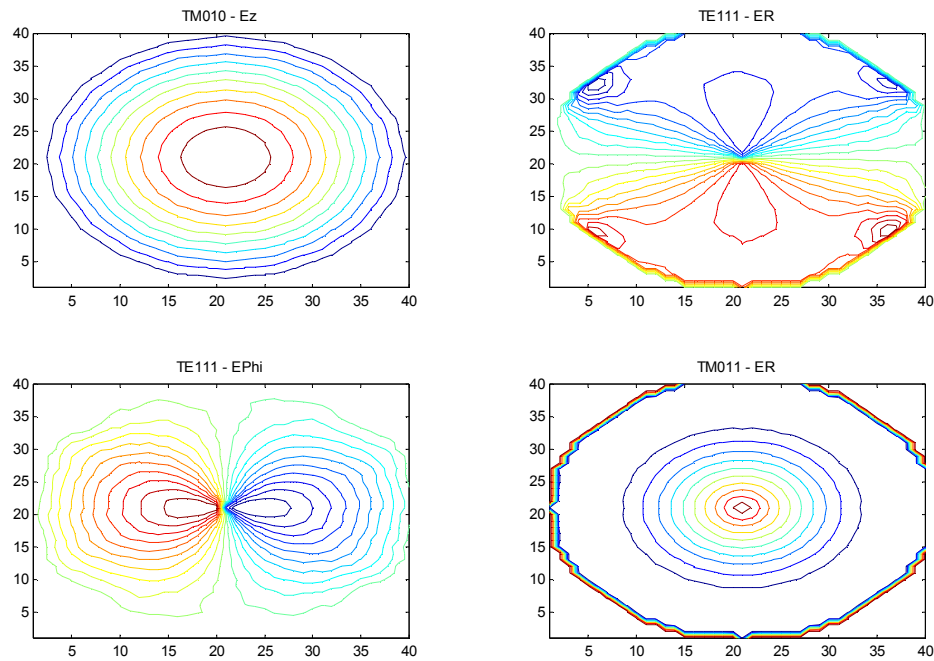
شکل ۴-۹- مدهای استوانه فلزی

شرایط آزمایش بدین صورت بوده است:

آزمایش ۲	آزمایش ۱	
10	7	قسمت‌های شعاعی
15	20	قسمت‌های زاویه‌ای
10	5	قسمت‌های ارتفاعی
1661	846	تعداد گره
7200	3300	تعداد المان
4983x4983	2538x2538	ابعاد ماتریس
1	1	ضریب پنالتی
3.05	3.09	حجم تقریب زده شده

جدول ۴-۶- شرایط آزمایش

با مقایسه پاسخ دو آزمایش نکته‌ی مهمی مشخص می‌شود: چگونگی مش‌بندی بسیار مهم است. با این‌که مش دوم تعداد نقاط بیش‌تری دارد ولی به دلیل بیش‌تر بودن $\Delta\phi$ (غیردقیق‌تر بودن)، پاسخ‌هایی با دقت پایین‌تری دارد. به نظر می‌رسد برای این مدها، دقت ϕ مهم‌تر باشد. از طرف دیگر، نمی‌توان دقت ϕ مش را بیش از حد بالا برد چون المان‌ها دارای زاویه‌های بسیار کم می‌شوند و این خود باعث ایجاد خطا می‌شود. [۱] توزیع بعضی از مولفه‌های چند مد اول در شکل نشان داده شده است.

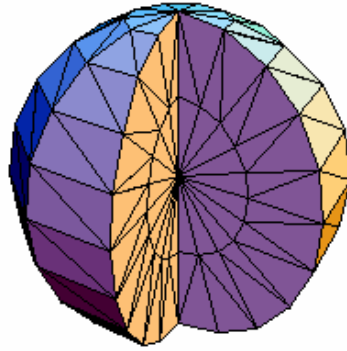


شکل ۴-۱۰- نمونه توزیع میدان در استوانه

۴-۴) فرکانس‌های رزونانس کره فلزی

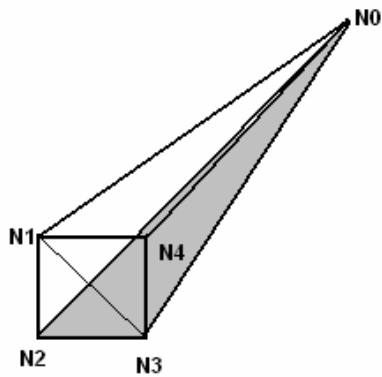
به عنوان آزمایش بعدی، فرکانس‌های رزونانس کره‌ی توخالی فلزی را به دست می‌آوریم. به دلیل پیچیدگی شکل‌ها و شلوغی بیش از حد رسم شکل^{۱۲}، از بیان دقیق چگونگی مش‌بندی صرف‌نظر می‌کنیم. تنها ذکر چند مورد مفید می‌باشد: اول این که پارامترهای مش‌بندی کره در این‌جا، تعداد تقسیم‌بندی‌های شعاعی، تقسیم‌بندی‌های مولفه θ و تقسیم‌بندی‌های مولفه φ می‌باشد. نکته دوم این که درست مانند حالت استوانه، دو نوع مش استفاده می‌شود: یکی برای لایه اول و دیگری برای لایه‌های بعدی. مش لایه‌ی اول به صورت تعدادی مجموعه‌ی ۲تایی از چهاروجهی‌هاست که یک راس‌شان در مرکز کره و راس دیگرشان بر سطح کره‌ای به شعاع Δr می‌باشد. هر سطح این مجموعه‌ها، مستطیل می‌باشد که نهایت مجموعه‌شان تقریب سطح کره با چند ضلعی است. هر جزء لایه‌های بعدی از مجموعه‌های چهاروجهی ۳تایی تشکیل شده است که منشوری با مقطع مثلث را پر می‌کنند. طرح کلی

^{۱۲} و البته در اختیار داشتن نرم‌افزارهای مناسب برای طراحی ۳بعدی.



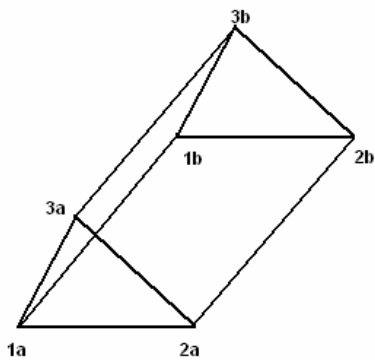
شکل ۴-۱۱ - نمونه پریده شده مش بندی کره

این دو نوع لایه در شکل نشان داده شده است.



Tetrahedral	Nodes
1	(0,1,2,3)
2	(*,1,3,4)

شکل ۴-۱۲ - لایه اول مش بندی کره



Tetrahedral	Nodes
1	(1a,2a,3a,1b)
2	(1b,2b,3b,2a)
3	(3b,2a,3a,1b)

شکل ۴-۱۳ - مش بندی لایه های بعدی

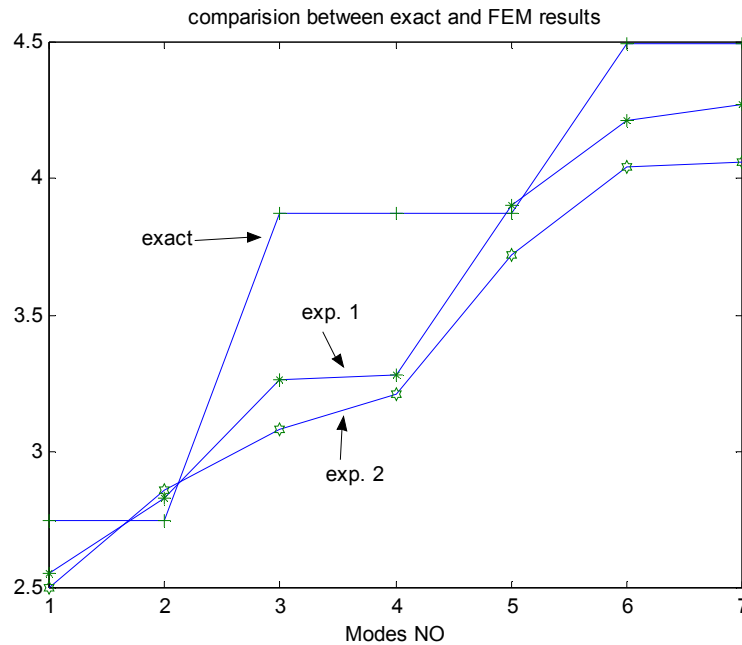
مانند قبل آزمایش‌هایی انجام داده‌ام که نتایج‌اش را در جدول زیر می‌بینید.

Mode No.	Exact	Experiment 1 N=401	Experiment 2 N=1093
TM_{011}	2.744	2.55 (-7.1%)	2.50 (-8.7%)
TM_{111}	2.744	2.83 (3.1%)	2.86 (4.3%)
TM_{021}	3.870	3.26 (-15.7%)	3.08 (-20.4%)
TM_{121}	3.870	3.28 (-15.2%)	3.21 (-17%)
TM_{221}	3.870	3.90 (0.77%)	3.72 (-3.9%)
TE_{011}	4.493	4.21 (-6.3%)	4.04 (-10%)
TE_{111}	4.493	4.27 (-4.9%)	4.06 (-9.6%)

جدول ۴-۷- مدهای کره به شعاع ۱

آزمایش ۲	آزمایش ۱	
6	4	قسمت‌های شعاعی
20	10	قسمت‌های φ
10	10	قسمت‌های θ
1093	401	تعداد گره
5760	2000	تعداد المان
3279x3279	1203	اندازه ماتریس
1	1	ضریب پنالتی
4.02(-4.0%)	3.87 (-7.6%)	حجم تقریب‌زده شده

جدول ۴-۸- شرایط آزمایش



شکل ۴-۱۴ - مدهای کره به شعاع ۱

همان‌طور که می‌بینید دقت نسبت به حالت‌های قبلی کاهش یافته است. در ضمن، مدهای یکسان نیز چندان نزدیک به هم نیستند و ممکن است دارای گستره وسیعی باشند. این باعث می‌شود فرض کنیم که علت این موضوع، وجود مدهای ناخواسته است که طیف فرکانسی مان را آلوده کرده‌اند. اما با بالا بردن ضریب پنالتی، تغییر محسوسی در نزدیک شدن مدها رخ نمی‌دهد. توجه به این نکته بسیار ضروری است که در جداول بالا، نامی که جلوی هر عدد موج قرار گرفته است ممکن است درست نباشد چون ملاک نام‌گذاری تنها ترتیب فرکانسی بوده است و نه مقایسه دقیق توزیع میدان در موج‌بر. این امر مخصوصاً برای شکلی چون کره چندان ساده نیست. به همین دلیل، ممکن است بعضی از مدها به دلیل مشکلات و تقریب‌های عددی به وجود نیایند یا بیش از تعداد واقعی به وجود بیایند - که چنین چیزی در حالت استوانه‌ای مشاهده شد^{۱۳}. علاوه بر این‌ها دیده می‌شود که بالا بردن دقت مش‌بندی الزاماً به معنای بهتر شدن پاسخ‌ها نیست. به

^{۱۳} بعضی از پاسخ‌های شکیرانگیز تست شده‌اند اما چون مطالعه‌ی جامعی نبوده است، ذکر آن از چگونگی انجام‌اش نخواهم کرد.

هر حال این مورد نیاز به بررسی دقیق‌تری دارد. ممکن است دلیل این موضوع، همان بالا رفتن خطای هر چهاروجهی به دلیل کم شدن بیش از حد کوچک‌ترین زاویه‌اش باشد که در آزمایش دوم به 12° می‌رسد.^{۱۴}

۴-۵) نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این پایان‌نامه، ابتدا با توضیح کاربرد روش‌های عددی در الکترومغناطیس شروع کردم و سپس ایده‌ی اصلی دو روش مبتنی بر حساب وردشی و باقیمانده وزن‌دار را بیان کردم. پس از آن، شرحی از چگونگی پیاده‌سازی این‌ها در FEM به صورت حل گام به گام صورت‌بندی نسبتاً کلی‌ای از مسایل الکترومغناطیس در حالت‌های ۱-بعدی و ۲-بعدی ارائه کردم و در نهایت، به فرمول‌بندی مساله‌ی اصلی که محاسبه فرکانس‌های رزونانس محفظه‌ی فلزی بود پرداختم. پس از آن، با ارایه‌ی چند مثال ساده که دارای جواب‌های آنالیتیک بودند دقت پیاده‌سازی FE خود را سنجیدم. جواب‌ها جز در حالت کروی کاملاً قابل قبول بود. با این حال در حالت کروی، فهمیدن دلیل خطا نیاز به مطالعه دقیق‌تری دارد که در این پروژه انجام نشده است. برای انجام این کار می‌بایست بررسی دقیقی در توزیع میدان هر کدام از پاسخ‌ها انجام شود. ممکن است دلیل این خطا، اشتباه در مش‌بندی باشد چون حالت کره در ظاهر برای FEM سخت‌تر از حالت مکعب مستطیل و استوانه نیست و حتی می‌توان ادعا کرد که ساده‌تر هم هست چون برخلاف آن دو نقاط تیز ندارد. با این وجود، با استفاده از نرم‌افزار فعلی می‌توان فرکانس رزونانس طیف وسیعی از انواع محفظه‌های فلزی را محاسبه کرد. با وجود این که مثال‌ها تنها برای حالت محفظه‌های توخالی بود اما برای محفظه‌های توپر و پرشده از ماده دی‌الکتریک نیز این فرمول‌بندی و نرم‌افزار کار خواهد کرد.

اگر بخواهم نقاط ضعف این فرمول‌بندی را بیان کنم، به موارد زیر می‌توانم اشاره کنم:

اولین مشکل، مدهای اضافه هستند. این نوع المان‌ها به طور ذاتی مدهای اضافی را مدل نمی‌کنند و یکی از راه‌حل‌هایش همان‌طور که گفته شد اضافه کردن جمله‌ی پنالتی به فراتابع‌مان است. اما همان‌طور که قبلاً

^{۱۴} وضعیت بهینه هنگامی است که همه زاویه‌ها تقریباً مساوی باشند.

گفتم، این باعث پایین آمدن دقت مان می شود. علاوه بر آن، انتخاب ضریب بهینه آن جمله، کاری است که چندان ساده نیست.

مشکل بعد هنگامی است که ضریب دی الکتریک ماده درون محفظه (در فرمول بندی میدان الکتریکی) و ضریب مغناطیسی (در فرمول بندی میدان مغناطیسی که مشابه قبلی است) دارای تغییرات شدید باشد. در این حالت دقت پاسخ ها به شدت افت می کند. دلیل این امر این است که المان های لاگرانژ (برخلاف المان های وجهی) پیوستگی مماسی میدان را به طور ذاتی اعمال نمی کنند. برای کم تاثیر کردن چنین خطایی می بایست مش بندی در نقاط حد فاصل دو ماده مغناطیسی دقیق تر شود [11].

سومین مشکل این است که در لبه های فلزی تیز¹⁵، میدان الکتریکی می تواند تکین شود [11]. اما مدل چندجمله ای درجه اول به کار رفته، توانایی مدل کردن صحیح چنین تکینگی ای را ندارند و این باعث مشکل می شود. یک روش حل چنین مساله ای، گرد کردن لبه های تیز با تعداد زیادی المان کوچک است. اما این کار مش بندی را بسیار پیچیده می کند و علاوه بر آن ماتریس های حاصل را نیز بسیار بزرگ می کند. روش دیگر، استفاده از المان هایی است که دارای توابع گسترشی هستند که به درستی میدان های تکین را مدل می کنند. با این که چنین کاری مشکل را حل می کند ولی چندان روش مناسبی نیست. اولین دلیلش این است که چنین کاری باعث پیچیده شدن بیش از حد نرم افزار FEM می شود و تولید نرم افزاری همه منظوره را مشکل می کند. دلیل دیگر این که چنین کاری منوط به این است که ما دقیقاً نحوه تکینگی در یک لبه تیز را به طور دقیق بدانیم و این نیاز به حل آنالیتیک مساله دارد که با این که در بعضی از حالات حل شده است، اما به هر حال به طور کلی مشخص نیست.

اکثر این مشکلات، با استفاده از المان های وجهی به طور کامل حل می شود. این المان ها همان طور که گفته بودم مشکل مدهای اضافی ندارند. از طرف دیگر، اعمال شرایط مرزی برای آن ها بسیار ساده تر و طبیعی تر است. جدا از این ها به دلیل این که چنین المان هایی به طور ذاتی خواصی چون پیوستگی مولفه مماسی را ارضا می کنند، برای مدل کردن میدان های الکترومغناطیسی بهتر و طبیعی تر از المان های لاگرانژی ای

¹⁵ گرچه این مشکل به شکلی خفیف تر در لبه های دی الکتریک یا مغناطیسی نیز وجود دارد.

هستند که سه مولفه هیچ ارتباط ذاتی‌ای با هم ندارند. به همین دلیل پیش‌نهاد می‌شود تحقیقات بعدی روی این زمینه با استفاده از این نوع المان‌ها انجام شود، همان‌طور که اکثر تحقیقات فعلی در سطح دنیا نیز بدین‌گونه است.

*Some people manage by the
book, even though they don't
now who wrote the book, or
even what book, “*

-Murphy Law

فصل پنجم

مراجع

- [1] M. Salazar-Palma, T.K. Sarkar, L. Garcia-Castillo, T. Roy, and A. Djordjevic, Iterative and Self-Adaptive Finite-Elements in Electromagnetic Modeling, Artech House, MA, 1998.
- [2] M. N. O. Sadiku, Numerical Techniques in Electromagnetics, CRC Press, Boca Raton, Florida, 1992.
- [3] A. Taflove, “Why Study Electromagnetics: The First Unit in an Undergraduate Electromagnetics Course,” IEEE Antennas Propag. Mag., 44(2): 1321-139, 2002.
- [4] R. Pashai, A. M. Farahmand, “Effect of Metallic Electrode and Buffer Layer on Dielectric Waveguides,” ITRC Technical Report, Unpublished.
- [5] A.M. Farahmand, “Designing Electromagnetical Multi-Layer Filters Using Evolutionary Strategy,” Unpublished.
- [6] A. Taflove and S. C. Hagness, Computation Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method, Artech House, Norwood, 2000.
- [7] A. Taflove and M. E. Brodwin, “Numerical Solution of Steady-State Electromagnetic Scattering Problems Using the Time-Dependent Maxwell’s Equations,” IEEE. Trans. Microwave Theory Tech., 23: 623-730, 1975.
- [8] R. F. Harrington, Field Computation by Moment Method, Macmillan Company, New York, 1968.
- [9] J. H. Richmond, “Scattering by a Dielectric Cylinder of Arbitrary Cross Section Shape”, IEEE Trans. Antennas Propagat., 13(3): 334-341, 1965.
- [10] J. H. Richmond, “TE-Wave Scattering by a Dielectric Cylinder of Arbitrary Cross-Section Shape”, IEEE Trans. Antennas Propagat., 14(2): 460-465, 1966.
- [11] J. Jin, The Finite Element Method in Electromagnetics, John Wiley & Sons, New York, 1993.
- [12] G. B. Arfken, Mathematical Methods for Physicists, Academic Press, California, 1995.

- [13] M. L. Boas, *Mathematical Methods in the Physical Sciences*, John Wiley & Sons, 1983.
- [14] C. M. Bishop, *Neural Networks for Pattern Recognition*, Oxford University Press, New York, 1995.
- [15] J. L. Volakis, A. Chatterjee, and L. C. Kempel, *Finite Element Method for Electromagnetics: With Applications to Antennas, Microwave Circuits, and Scattering*, IEEE Press, New York, 1998.
- [16] J. F. Thompson, B. Soni, and N. P. Weatherill, *Handbook of Grid Generation*, CRC Press, 1998.
- [۱۷] آ. احمدی، تعیین فرکانس یک موج‌بر با مقطع دل‌خواه به روش اجزاء محدود، دانشگاه صنعتی خواجه‌نصیرالدین طوسی، دانشکده برق، پایان‌نامه کارشناسی، شماره ۱۳۸۴.
- [18] I. Bardi, O. Biro, and K. Preis, "Finite Element Scheme for 3D Cavities without Spurious Modes," *IEEE Trans. Magnetics*, 27(5): 4036-3039, 1991.
- [19] P. Fernandes and M. Raffetto, "Counterexamples to the Currently Accepted Explanation for Spurious Modes and Necessary and Sufficient Conditions to Avoid Them," *IEEE Trans. Magnetics.*, 38(2): 653-656, 2002.
- [20] J.P. Webb, "Efficient Generation of Divergence-Free Fields for the Finite Element Analysis of 3D Cavity Resonances," *IEEE Trans. Magnetics*, 24(1): 162-165, 1988.
- [21] X. Yuan, "Three-Dimensional Electromagnetic Scattering from Inhomogeneous Objects by the Hybrid Moment and Finite Element Method," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 38(8): 1053-1058, 1990.
- [22] J.-F. Lee and R. Mittra, "A Note on the Application of Edge Elements for Modeling Three-Dimensional Inhomogeneously filled Cavities," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 39(4): 1767-1773, 1992.
- [23] D. B. Davidson, "Comments on and Extension of "A Note on Application of Edge-Elements for Modeling Three-Dimensional Inhomogeneously Filled Cavities," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 46(9): 1344-1346, 1998
- [24] A. Chatterjee, J. M. Jin, and J. L. Volakis, "Computation of Cavity Resonances Using Edge-Based Finite Elements," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 40(11): 2106-2108, 1992.
- [25] D. Davidson, "Implementation Issues for Three-Dimensional Vector FEM Programs," *IEEE Antenna's and Propagation Mag.*, 42(6): 2000.

- [26] S. Wolfram, The Mathematica Book, 3rd ed., Wolfram Media/Cambridge University Press, 1996.
- [27] C. A. Balanis, Advanced engineering electromagnetics, McGraw-Hill, New York, 1989.

"A human being is a part of a whole, called by us universe, a part limited in time and space. He experiences himself, his thoughts and feelings as something separated from the rest...a kind of optical delusion of his consciousness. This delusion is a kind of prison for us, restricting us to our personal desires and to affection for a few persons nearest to us. Our task must be to free ourselves from this prison by widening our circle of compassion to embrace all living creatures and the whole of nature in its beauty."

-A. Einstein